2025 年全国硕士研究生招生考试

(数学三)

一、选择题:1~10 小题，每小题 5 分，共 50 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选 项是最符合题目要求的。

1．当 $x \to 0^+$ 时，下列无穷小量中，与 x 等价的是（ ）

A. $e^{-\sin x}-1$　　B. $\sqrt{x+1}-\cos x$　　C. $1-\cos\sqrt{2x}$　　D. $1-\dfrac{\ln(1+x)}{x}$

【答案】C.

【解】方法一:

对于选项 A：因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{-\sin x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-\sin x}{x}=-1$，所以当 $x\to 0^+$ 时，$e^{-\sin x}-1$ 与 x 不等价.

对于选项 B:

因为

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x+1}-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x+1}-1+1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}+\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x}=\frac{1}{2},$$

所以当 $x\to 0^+$ 时，$\sqrt{x+1}-\cos x$ 与 x 不等价.

对于选项 C:

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos\sqrt{2x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{2}(\sqrt{2x})^2}{x}=1$，所以当 $x\to 0^+$ 时，$1-\cos\sqrt{2x}$ 是 x 的等价无穷小.

对于选项 D:

因为

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\frac{\ln(1+x)}{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\left(x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)}{x^2}=\frac{1}{2},$$

所以当 $x\to 0^+$ 时，$1-\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ 与 x 不等价.

综上所述，答案选（C）.

方法二：当 $x\to 0^+$ 时

$$e^{-\sin x}-1\sim -\sin x\sim -x,$$

$$\sqrt{x+1}-\cos x=(1+x)^{\frac{1}{2}}-\cos x=1+\frac{1}{2}x-1+o(x)=\frac{1}{2}x+o(x)\sim\frac{1}{2}x,$$

$$1-\cos\sqrt{2x}\sim\frac{1}{2}\left(\sqrt{2x}\right)^2=x,$$

$$1-\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{x-\ln(1+x)}{x}=\frac{x-\left[x-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)\right]}{x}=\frac{1}{2}x+o(x)\sim\frac{1}{2}x.$$

综上所述，答案选 C.

2.已知函数 $f(x)=\int_0^x e^{t^2}\sin t\,dt, g(x)=\int_0^x e^{t^2}dt\cdot\sin^2 x$，则(　)

A. $x=0$ 为 $f(x)$ 的极值点，也是 $g(x)$ 的极值点

B. $x=0$ 为 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 是曲线 $y=g(x)$ 的拐点

C. $x=0$ 为 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

D. $(0,0)$ 为 $y=f(x)$ 的拐点，也是曲线 $y=g(x)$ 的拐点

【答案】B.

【解】方法一 利用泰勒级数

$$e^{t^2}\sin t=\left(1+t^2+\cdots\right)(t+\cdots)=t+\cdots\Rightarrow f(x)=\int_0^x(t+\cdots)dt=\frac{1}{2}x^2+\cdots$$

从而 $f'(0)=0, f''(0)=1$.所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极值点；

$$g(x)=\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)\cdot\sin^2 x=\left(\int_0^x\left(1+t^2+\cdots\right)dt\right)\cdot\sin^2 x=(x+\cdots)\left(x^2+\cdots\right)=x^3+\cdots$$

从而 $g''(0)=0, g'''(0)=6\neq 0$，$(0,0)$ 是曲线 $y=g(x)$ 的拐点.故选 B.

方法二：由于

$$f'(x)=e^{x^2}\sin x, f''(x)=2xe^{x^2}\sin x+e^{x^2}\cos x\Rightarrow f'(0)=0, f''(0)=1\neq 0,$$

所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极值点；

由于 $g'(x)=\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)\cdot\sin 2x+e^{x^2}\sin^2 x,$

$$g''(x)=\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)\cdot 2\cos 2x+2e^{x^2}\cdot\sin 2x+2xe^{x^2}\sin^2 x\ ,$$

$$g'''(x)=6e^{x^2}\cos 2x+\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)\cdot(-4)\cos 2x+6xe^{x^2}\cdot\sin 2x+2e^{x^2}\sin^2 x+4x^2e^{x^2}\sin^2 x$$

所以$g''(0)=0,g'''(0)=6\neq 0$，$(0,0)$是曲线$y=g(x)$的拐点.

3．已知k为常数，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right]$(　　)

A.绽对收敛　　B.条件收敛

C.发散　　D.敛散性与k的取值相关

【答案】B.

【解】由于$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，由莱布尼兹判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$收敛，

又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$条件收敛。

又$\left|(-1)^n\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right|=\left|\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right|\sim\frac{|k|}{n^2}$，且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|k|}{n^2}$收敛，故级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$绝对收敛，从而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right]$条件收敛.答案选B.

4．设函数$f(x)$连续，则$\int_0^1 dy\int_0^y f(x)dx=$（　　）

A. $\int_0^1 xf(x)dx$　　B. $\int_0^1(1+x)f(x)dx$　　C. $\int_0^1(x-1)f(x)dx$　　D. $\int_0^1(1-x)f(x)dx$

【答案】D.

【解】积分区域$D:\begin{cases}0\le x\le y\\0\le y\le 1\end{cases}$，将区域$D$看做$X$型，得$D:\begin{cases}0\le x\le 1\\x\le y\le 1\end{cases}$，从而

$$\int_0^1 dy\int_0^y f(x)dx=\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)dy=\int_0^1(1-x)f(x)dx.$$

5.已知$\boldsymbol{A}$是$m\times n$的矩阵，$\boldsymbol{\beta}$是m维非零向量.若$\boldsymbol{A}$有k阶非零子式，则（　　）

A.当$k=m$时$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$有解　　B.当$k=m$时$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$无解

C.当 $k<m$ 时 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有解　　D.当 $k<m$ 时 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 无解

【答案】A.

【解】因为 $\boldsymbol{A}$ 有 k 阶非零子式，所以 $r(\boldsymbol{A})\ge k$，则当 $k=m$ 时，

$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=m$,故方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有解，本题选 A.

6.设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶矩阵，则“$\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}^2$ 可对角化”是“$\boldsymbol{A}$ 可对角化”的(　　)

A.充分但不必要条件　　B.必要但不充分条件

C.充分必要条件　　D.既不充分也不必要条件

【答案】B.

【解】$\boldsymbol{A}$ 可对角化 $\Leftrightarrow \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\Lambda \Leftrightarrow \boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{P}^{-1}$

$\Rightarrow \boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}^2=\left(\boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{P}^{-1}\right)^3-\left(\boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{P}^{-1}\right)^2=\boldsymbol{P}\Lambda^3\boldsymbol{P}^{-1}-\boldsymbol{P}\Lambda^2\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\left(\Lambda^3-\Lambda^2\right)\boldsymbol{P}^{-1}$

$\Leftrightarrow \Lambda^3-\Lambda^2=\boldsymbol{P}^{-1}\left(\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}^2\right)\boldsymbol{P}$,

所以“$\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}^2$ 可对角化”是“$\boldsymbol{A}$ 可对角化”的必要条件。

取

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

有

$$\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0},$$

即得 $\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}^2$ 可对角化，而 $\boldsymbol{A}$ 不能对角化，所以“$\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}^2$ 可对角化”不是“$\boldsymbol{A}$ 可对角化”的充分条件。综上所述，本题选 B.

7. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\-2&-a\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\1&a\end{pmatrix}$,若 $f(x,y)=\left|x\boldsymbol{A}+y\boldsymbol{B}\right|$ 是正定二次型，则 a 的取值范围是(　　)

A. $(0,2-\sqrt{3})$　　B. $(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3})$　　C. $(2+\sqrt{3},4)$　　D. $(0,4)$

【答案】B.

【解】由题设可知

$$f(x,y)=\left|x\boldsymbol{A}+y\boldsymbol{B}\right|=\begin{vmatrix}x+y&2x\\-2x+y&-ax+ay\end{vmatrix}=(4-a)x^2-2xy+ay^2,$$

二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}4-a & -1\\ -1 & a\end{bmatrix}.$$

已知二次型正定，所以

$$\begin{cases}4-a>0\\ a(4-a)-1>0\end{cases}$$

解得

$$2-\sqrt{3}<a<2+\sqrt{3}.$$

故，本题选 B.

8.设随机变量 X 服从正态分布 $N(-1,1)$， Y 服从正态分布 $N(1,2)$，若 X 与 $X+2Y$ 不相关，则 X 与 $X-Y$ 的相关系数为(　　)

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{3}{4}$

【答案】D.

【解】因为 X 与 $X+2Y$ 不相关，所以

$$\operatorname{cov}(X,X+2Y)=\operatorname{cov}(X,X)+2\operatorname{cov}(X,Y)=DX+2\operatorname{cov}(X,Y)$$

$$=1+2\operatorname{cov}(X,Y)=0,$$

解得

$$\operatorname{cov}(X,Y)=-\frac{1}{2}.$$

于是

$$D(X-Y)=DX+DY-2\operatorname{cov}(X,Y)=3-(-1)=4.$$

所以 X 与 $X-Y$ 的相关系数为

$$\rho=\frac{\operatorname{cov}(X,X-Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{D(X-Y)}}=\frac{DX-\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{D(X-Y)}}=\frac{1+\dfrac{1}{2}}{1\cdot 2}=\frac{3}{4}.$$

故，本题选 D.

9.设$X_1,X_2,\cdots,X_{20}$是来自总体$B(1,0.1)$的简单随机样本，令$T=\sum_{i=1}^{20}X_i$，利用泊松分布近似表示二项分布的方法可得$P\{T\le 1\}\approx$(　　)

A.$\frac{1}{e^2}$　　B.$\frac{2}{e^2}$　　C.$\frac{3}{e^2}$　　D.$\frac{4}{e^2}$

【答案】C.

【解】由于$T=\sum_{i=1}^{20}X_i\sim B(20,0.1)$，所以$T\overset{\text{近似}}{\sim}P(2)$，故

$$P\{T\le 1\}=P\{T=0\}+P\{T=1\}\approx\frac{2^0}{0!}e^{-2}+\frac{2^1}{1!}e^{-2}=3e^{-2}.$$

答案选C.

10.设总体X的分布函数为$F(x)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X的简单随机样本，样本的经验分布函数为$F_n(x)$，对于给定的x $(0<F(x)<1)$, $D(F_n(x))=$ (　　)

A.$F(x)(1-F(x))$　　B.$(F(x))^2$　　C.$\frac{1}{n}F(x)(1-F(x))$　　D. $\frac{1}{n}(F(x))^2$

【答案】C.

【解】经验分布函数$F_n(x)=\frac{N}{n}$，其中$N\sim B(n,F(x))$，从而

$$D(F_n(x))=D(\frac{N}{n})=\frac{1}{n^2}D(N)=\frac{1}{n^2}\cdot nF(x)\left[1-F(x)\right]=\frac{1}{n}F(x)\left[1-F(x)\right].$$

二、填空题：11~16小题,每小题5分,共30分.

11.设$g(x)$是函数$f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{3+x}{3-x}$的反函数，则曲线$y=g(x)$的渐近线方程为______.

【答案】$y=\pm 3$.

【解】由

$$y=\frac{1}{2}\ln\frac{3+x}{3-x}\Rightarrow 2y=\ln\frac{3+x}{3-x}\Rightarrow\frac{3+x}{3-x}=e^{2y}\Rightarrow x=3\cdot\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}.$$

所以曲线$y=g(x)$的方程为

$$y=3\cdot\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}.$$

这是连续函数，所以没有铅直渐近线。

因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}{x}=3\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{e^{2x}+1}}{x}=0,$$

且

$$\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}3\cdot\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=3,\ \lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}3\cdot\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=-3.$$

故，所求的渐近线方程为

$$y=\pm 3.$$

12.设$\int_1^{+\infty}\frac{a}{x(2x+a)}dx=\ln 2$，则$a=$______.

【答案】2.

【解】因为

$$\ln 2=\int_1^{+\infty}\frac{a}{x(2x+a)}dx=2\int_1^{+\infty}\frac{a}{2x(2x+a)}dx=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{2x+a}\right)d(2x)$$

$$=\ln\frac{2x}{2x+a}\Big|_1^{+\infty}=-\ln\frac{2}{2+a}=\ln\left(1+\frac{a}{2}\right),$$

从而$2=1+\frac{a}{2}$,解得$a=2$.

13.微分方程$xy'-y+x^2e^x=0$满足条件$y(1)=-e$的解为_____.

【答案】$y=-xe^x$.

【解】原方程是一阶线性微分方程

$$y'-\frac{1}{x}y=-xe^x.$$

其通解为

$$y=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[C+\int\left(-x\mathrm{e}^{x}\right)\cdot\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]=x\left(C-\int\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x\right)=x\left(C-\mathrm{e}^{x}\right).$$

因为 $y(1)=-\mathrm{e}$，所以 $-\mathrm{e}=C-\mathrm{e}$, 解得 $C=0$. 故，所求的特解为

$$y=-x\mathrm{e}^{x}.$$

14.已知 $z=z(x,y)$ 由 $z+\ln z-\int_{y}^{x}x\mathrm{e}^{-t^{2}}\mathrm{d}t=1$ 确定，则 $\left.\frac{\partial^{2}z}{\partial x^{2}}\right|_{(1,1)}=$ ________.

【答案】$\frac{1}{8\mathrm{e}^{2}}$.

【解】方程

$$z+\ln z-\int_{y}^{x}x\mathrm{e}^{-t^{2}}\mathrm{d}t=1$$

可化为

$$z+\ln z-x\cdot\int_{y}^{x}\mathrm{e}^{-t^{2}}\mathrm{d}t=1 \qquad ①$$

将 $x=1,y=1$ 代入方程①可得 $z=1$.

方程①两端对 x 求偏导得

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-\int_{y}^{x}\mathrm{e}^{-t^{2}}\mathrm{d}t-x\mathrm{e}^{-x^{2}}=0 \qquad ②$$

将 $x=1,y=1,z=1$ 代入方程②可得

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}.$$

方程②两端对 x 求偏导得

$$\frac{\partial^{2}z}{\partial x^{2}}-\frac{1}{z^{2}}\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{2}+\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial^{2}z}{\partial x^{2}}-\mathrm{e}^{-x^{2}}-\mathrm{e}^{-x^{2}}+2x^{2}\mathrm{e}^{-x^{2}}=0 \qquad ③$$

将 $x=1,y=1,z=1,\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$ 代入方程③可得

$$\left.\frac{\partial^{2}z}{\partial x^{2}}\right|_{(1,1)}=\frac{1}{8\mathrm{e}^{2}}.$$

15.已知 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x+1 & 3 & 2x+1 & 1 \\ 2x & -3 & 4x & -2 \\ 2x+1 & 2 & 2x+1 & 1 \\ 2x & -4 & 4x & -2 \end{vmatrix}, g(x)=\begin{vmatrix} 2x+1 & 1 & 2x+1 & 3 \\ 5x+1 & -2 & 4x & -3 \\ 0 & 1 & 2x+1 & 2 \\ 2x & -2 & 4x & -4 \end{vmatrix}$, 则方程 $f(x)=g(x)$ 的不同的根的个数为______.

【答案】2.

【解】由 $f(x)=g(x)$ 得

$$\begin{vmatrix} 2x+1 & 3 & 2x+1 & 1 \\ 2x & -3 & 4x & -2 \\ 2x+1 & 2 & 2x+1 & 1 \\ 2x & -4 & 4x & -2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 2x+1 & 1 & 2x+1 & 3 \\ 5x+1 & -2 & 4x & -3 \\ 0 & 1 & 2x+1 & 2 \\ 2x & -2 & 4x & -4 \end{vmatrix}=0,$$

即

$$\begin{vmatrix} 2x+1 & 3 & 2x+1 & 1 \\ 2x & -3 & 4x & -2 \\ 2x+1 & 2 & 2x+1 & 1 \\ 2x & -4 & 4x & -2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2x+1 & 3 & 2x+1 & 1 \\ 5x+1 & -3 & 4x & -2 \\ 0 & 2 & 2x+1 & 1 \\ 2x & -4 & 4x & -2 \end{vmatrix}=0,$$

从而

$$\begin{vmatrix} 4x+2 & 3 & 2x+1 & 1 \\ 7x+1 & -3 & 4x & -2 \\ 2x+1 & 2 & 2x+1 & 1 \\ 4x & -4 & 4x & -2 \end{vmatrix}=0,$$

因为

$$\begin{vmatrix} 4x+2 & 3 & 2x+1 & 1 \\ 7x+1 & -3 & 4x & -2 \\ 2x+1 & 2 & 2x+1 & 1 \\ 4x & -4 & 4x & -2 \end{vmatrix}\overset{c_1-c_3}{=}\begin{vmatrix} 2x+1 & 3 & 2x+1 & 1 \\ 3x+1 & -3 & 4x & -2 \\ 0 & 2 & 2x+1 & 1 \\ 0 & -4 & 4x & -2 \end{vmatrix}\overset{c_2-2c_4}{=}\begin{vmatrix} 2x+1 & 1 & 2x+1 & 1 \\ 3x+1 & 1 & 4x & -2 \\ 0 & 0 & 2x+1 & 1 \\ 0 & 0 & 4x & -2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 2x+1 & 1 \\ 3x+1 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 2x+1 & 1 \\ 4x & -2 \end{vmatrix}=-x\cdot(-8x-2),$$

所以方程

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow -x(-8x-2)=0$$

有两个不同实根$0,-\dfrac{1}{4}$.

16.设A,B,C为三个随机事件，且A与B相互独立，B与C相互独立，A与C互不相容.已知$P(A)=P(C)=\dfrac{1}{4},P(B)=\dfrac{1}{2}$，则在事件$A,B,C$至少有一个发生的条件下，$A,B,C$中恰有一个发生的概率为______.

【答案】$\dfrac{2}{3}$.

【解】由事件A与B相互独立知$P(AB)=P(A)P(B)$，由B与C相互独立知$P(BC)=P(B)P(C)$，再由A与C互不相容知$P(AC)=0$.

又$A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\subset A\cup B\cup C$，从而在$A,B,C$至少有一个发生的条件下，$A,B,C$中恰有一个发生的概率为

$$P(A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\mid A\cup B\cup C)=\frac{P(A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C)}{P(A\cup B\cup C)}$$

$$=\frac{P(A\overline{B\cup C})+P(B\overline{A\cup C})+P(\overline{A\cup B}C)}{1-P(\overline{A\cup B\cup C})}$$

由于

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=P(A)+P(B)+P(C)-P(A)P(B)-P(AC)-P(B)P(C)+P(ABC)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}-0-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+0=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

$$P(A\overline{B\cup C})=P(A)-P(A(B\cup C))=P(A)-P(AB\cup AC)=P(A)-P(AB)$$

$$=P(A)-P(A)P(B)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}.$$

$$P(B\overline{A\cup C})=P(B)-P(B(A\cup C))=p(B)-P(AB\cup BC)$$

$$=p(B)-[P(AB)+P(BC)-P(ABC)]$$

$$=p(B)-\left[P(A)P(B)+P(B)P(C)-P(ABC)\right]$$

$$=\frac{1}{2}-(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}-0)=\frac{1}{4}.$$

$$P(\overline{A\cup B}C)=P(C)-P(C(A\cup B))=P(C)-P(AC\cup BC)$$

$$=P(C)-P(BC)=P(C)-P(B)P(C)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

故 $P(A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\mid A\cup B\cup C)=\dfrac{\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}{\frac{3}{4}}=\dfrac{2}{3}.$

三、解答题：17~22 题，共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（本题满分 10 分）

求积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{(x+1)(x^2-2x+2)}\mathrm{d}x.$

【解】综合利用定积分的换元法、牛顿莱布尼兹公式得

$$\int_0^1\frac{1}{(x+1)(x^2-2x+2)}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{(x+1)\left[\left(x-1\right)^2+1\right]}\mathrm{d}x\overset{x-1=t}{=}\int_{-1}^0\frac{1}{(t+2)\left(t^2+1\right)}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{5}\int_{-1}^0\left(\frac{1}{t+2}+\frac{-t+2}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{5}\left(\ln\left(t+2\right)-\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)+2\arctan t\right)\Big|_{-1}^0$$

$$=\frac{1}{5}\left[\ln 2-\left(-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{1}{5}\left(\frac{3}{2}\ln 2+\frac{\pi}{2}\right).$$

18.（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\mathrm{e}^{2\sin x}+1}{\ln(1+x)+\ln(1-x)}=-3$, 证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，并求 $f'(0)$.

【解】方法一：

由

$$\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\mathrm{e}^{2\sin x}+1}{\ln(1+x)+\ln(1-x)}=-3$$

可得

$$-3=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\mathrm{e}^{2\sin x}+1}{\ln(1+x)+\ln(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\mathrm{e}^{2\sin x}+1}{\ln(1-x^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\left[1+2\sin x+\frac{1}{2}(2\sin x)^2+o\left(x^2\right)\right]+1}{-x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-2\sin x-2\sin^2 x+o\left(x^2\right)}{-x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-2x-2x^2+o\left(x^2\right)}{-x^2}=2-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x}.$$

从而有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x}=5.$$

已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以

$$f\left(0\right)=\lim_{x\to 0}f\left(x\right)=2.$$

故

$$f'\left(0\right)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f\left(0\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x}=5.$$

方法二：

$\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\mathrm{e}^{2\sin x}+1}{\ln(1+x)+\ln(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\mathrm{e}^{2\sin x}+1}{\ln(1-x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\mathrm{e}^{2\sin x}+1}{-x^2}=-3$ ，由极限和无穷小的关系知，$f(x)=\frac{e^{2\sin x}-1}{x}-(-3+\alpha)x$，其中 $\lim_{x\to 0}\alpha=0$ 由于 $f(x)$ 连续，

所以

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^{2\sin x}-1}{x}-(-3+\alpha)x\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2\sin x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{x}=2$$

从而

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{2\sin x}-1}{x}-(-3+a)x-2}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2\sin x}-1-(-3+a)x^2-2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2\sin x}-1-2x}{x^2}+3$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+2\sin x+\frac{1}{2}(2\sin x)^2+o\left(x^2\right)-1-2x}{x^2}+3$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-2x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(2\sin x)^2+o\left(x^2\right)}{x^2}+3=0+2+3=5.$$

19.（本题满分 12 分）

已知平面有界区域 $D=\left\{(x,y)\middle|y^2\le x,x^2\le y\right\}$, 计算二重积分 $\iint\limits_D (x-y+1)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

【解】积分区域 D 关于直线 $y=x$ 对称.由二重积分的轮换对称性得

$$I=\iint_D (x-y+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left[\iint_D (y-x+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D (x-y+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D\left[(y-x+1)^2+(x-y+1)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\left(x^2+y^2-2xy+1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D\left(x^2+y^2-2xy\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{y^2}^{\sqrt{y}}\left(x^2+y^2-2xy\right)\mathrm{d}x+\int_0^1\mathrm{d}y\int_{y^2}^{\sqrt{y}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\left[\left(\frac{1}{3}x^3+xy^2-yx^2\right)\Bigg|_{y^2}^{\sqrt{y}}\right]\mathrm{d}y+\int_0^1\left(\sqrt{y}-y^2\right)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{3}y^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{5}{2}}-y^2-\frac{1}{3}y^6-y^4+y^5\right)\mathrm{d}y+\left(\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_0^1$$

$$=\left(\frac{2}{15}y^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{21}y^7-\frac{1}{5}y^5+\frac{1}{6}y^6\right)\Bigg|_0^1+\frac{1}{3}$$

$$=\frac{71}{210}.$$

20.（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 可导，证明：导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 内严格单增的充分必要条件是:

对 (a,b) 内任一点 x_1,x_2,x_3，当 $x_1<x_2<x_3$ 时 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$.

【证明】先证必要性：设 $f'(x)$ 在 (a,b) 内严格单增. $\forall x_1<x_2<x_3\in(a,b)$，由拉格朗日中值定理可得,

$\exists\xi_1\in(x_1,x_2),\xi_2\in(x_2,x_3)$，使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi_1),\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}=f'(\xi_2)$$

因为 $f'(x)$ 在 (a,b) 内严格单增，所以 $f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$，故

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

再证充分性：设当 $x_1<x_2<x_3$ 时，$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$.下面证明 $f'(x)$ 在 (a,b) 内严格单增。

$\forall x_1<x_2\in(a,b)$，取 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$,则由条件可得，$\forall h>0$(足够小)，有

$$\frac{f(x_1)-f(x_1-h)}{h}<\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}<\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}<\frac{f(x_2+h)-f(x_2)}{h}$$

所以

$$f'(x_1)=\lim_{h\to0^+}\frac{f(x_1)-f(x_1-h)}{h}\le\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1},$$

$$f'(x_2)=\lim_{h\to0^+}\frac{f(x_2+h)-f(x_2)}{h}\ge\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0},$$

故 $f'(x_1)<f'(x_2)$,即 $f'(x)$ 在 (a,b) 内严格单增。

21.（本题满分 12 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&3&0&-1\\-1&0&-2&-a&-1\\1&1&a&2&3\end{pmatrix}$ 的秩为 2.

(1)求 a 的值；

(2)求 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大线性无关组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$，并求矩阵 $\boldsymbol{H}$,使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{GH}$,其中 $\boldsymbol{G}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$.

【解】(I) 将 $\boldsymbol{A}$ 化为行阶梯形矩阵得

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&3&0&-1\\-1&0&-2&-a&-1\\1&1&a&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&-1&3&0&-1\\0&-1&1&-a&-2\\0&2&a-3&2&4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+2r_2}\begin{pmatrix}1&-1&3&0&-1\\0&-1&1&-a&-2\\0&0&a-1&2-2a&0\end{pmatrix},$$

因为 $r(A)=2$，所以 $a=1$.

(II) 由 (I) 可知矩阵可化为行最简形矩阵

$$A\to\begin{pmatrix}1&-1&3&0&-1\\0&-1&1&-1&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&2&1&1\\0&-1&1&-1&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_2}\begin{pmatrix}1&0&2&1&1\\0&1&-1&1&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

由此可得 A 的列向量组的一个极大无关组为

$$\alpha=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\beta=\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

记

$$H=(H_1,H_2,H_3,H_4,H_5).$$

解方程 $GH=A$，将矩阵 $(G|A)$ 化为行最简形得

$$(G|A)=\left(\begin{array}{cc|ccccc}1&-1&1&-1&3&0&-1\\-1&0&-1&0&-2&-1&-1\\1&1&1&1&1&2&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|ccccc}1&0&1&0&2&1&1\\0&1&0&1&-1&1&2\\0&0&0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

所以

$$H_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},H_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},H_3=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},H_4=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},H_5=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

故，所求的矩阵为

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}1&0&2&1&1\\0&1&-1&1&2\end{pmatrix}.$$

22.（本题满分 12 分）

投保人的损失事件发生时，保险公司的赔付额Y与投保人的损失额X关系为

$$Y=\begin{cases}0, & X\le 100\\ X-100, & X>100\end{cases},$$

设损失事件发生时，投保人的损失额X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\times100^2}{(100+x)^3}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}.$$

(I) 求$P\{Y>0\}$及$E(Y)$.

(II) 设这种损失事件一年内发生的次数记为N，保险公司在一年内就这种损失事件产生的理赔次数记为M，假设N服从参数为8的泊松分布，在$N=n(n\ge1)$的条件下，M服从二项分布$B(n,p)$，其中$p=P\{Y>0\}$.求M的概率分布.

【解】(I) 由题意

$$P\{Y>0\}=P\{X-100>0\}=P\{X>100\}=\int_{100}^{+\infty}\frac{2\times100^2}{(100+x)^3}\mathrm{d}x=2\times100^2\int_{200}^{+\infty}\frac{1}{u^3}\mathrm{d}u$$

$$=\left(-100^2\cdot\frac{1}{u^2}\right)\Bigg|_{200}^{+\infty}=\frac{1}{4}.$$

$$E(Y)=\int_{100}^{+\infty}(x-100)\cdot\frac{2\times100^2}{(100+x)^3}\mathrm{d}x=2\times100^2\cdot\int_{100}^{+\infty}\left[\frac{x+100}{(100+x)^3}-\frac{200}{(100+x)^3}\right]\mathrm{d}x$$

$$=2\times100^2\cdot\int_{200}^{+\infty}\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u-4\times100^3\int_{200}^{+\infty}\frac{1}{u^3}\mathrm{d}u=-2\times100^2\times\frac{1}{u}\Bigg|_{200}^{+\infty}+2\times100^3\times\frac{1}{u^2}\Bigg|_{200}^{+\infty}$$

$$=100-50=50.$$

(II) 由题意知$N\sim P(8)$，从而$P\{N=n\}=\dfrac{8^n}{n!}\mathrm{e}^{-8},n=1,2,\cdots$，又由$N=n(n\ge1)$的条件下，$M$服从二项分布$B(n,p)$知，

$$P\{M=k\mid N=n\}=C_n^k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k},k=0,1,\cdots,n.$$

从而

$$P\{M=k\}=\sum_{n=k}^{\infty}P\{N=n\}\cdot P\{M=k\mid N=n\}=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{8^n}{n!}\mathrm{e}^{-8}\cdot C_n^k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{-8}}{3^k k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{6^n}{n!}\cdot\frac{n!}{(n-k)!}=\frac{\mathrm{e}^{-8}}{3^k k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{6^n}{(n-k)!}=\frac{2^k\mathrm{e}^{-8}}{k!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{6^m}{m!}=\frac{2^k\mathrm{e}^{-8}}{k!}\mathrm{e}^6$$

$$=\frac{2^k}{k!}\mathrm{e}^{-2}\left(k=0,1,2,\cdots\right)$$

即 M 服从参数为 2 的泊松分布.