2025 年全国硕士研究生招生考试

(数学二)

一、选择题：1~10 小题,每小题 5 分,共 50 分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的，请将所选选项前的字母填在答题卡指定位置.

1.设函数 $z=z(x,y)$ 是由 $z+\ln z-\int_y^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=0$ 确定，则 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=$ (　　)

A. $\frac{z}{z+1}(\mathrm{e}^{-x^2}-\mathrm{e}^{-y^2})$　　　B. $\frac{z}{z+1}(\mathrm{e}^{-x^2}+\mathrm{e}^{-y^2})$

C. $-\frac{z}{z+1}(\mathrm{e}^{-x^2}-\mathrm{e}^{-y^2})$　　　D. $-\frac{z}{z+1}(e^{-x^2}+e^{-y^2})$

【答案】A.

【解】方法一：设 $F(x,y,z)=z+\ln z-\int_y^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$，则 $F_x'=-e^{-x^2}, F_y'=e^{-y^2}, F_z'=1+\frac{1}{z}$，

于是 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{1+\frac{1}{z}}=\frac{z\mathrm{e}^{-x^2}}{1+z}$， $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{\mathrm{e}^{-y^2}}{1+\frac{1}{z}}=-\frac{z\mathrm{e}^{-y^2}}{1+z}$，从而

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z\mathrm{e}^{-x^2}}{1+z}-\frac{z\mathrm{e}^{-y^2}}{1+z}=\frac{z}{z+1}\left(\mathrm{e}^{-x^2}-\mathrm{e}^{-y^2}\right).$$

方法二：$0=\mathrm{d}\left(z+\ln z-\int_y^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=0\right)=\mathrm{d}z+\frac{1}{z}\mathrm{d}z-\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x-(-\mathrm{e}^{-y^2})\mathrm{d}y$，化简，得

$\mathrm{d}z=\frac{z}{z+1}(\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y)$，从而 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z\mathrm{e}^{-x^2}}{1+z}-\frac{z\mathrm{e}^{-y^2}}{1+z}=\frac{z}{z+1}\left(\mathrm{e}^{-x^2}-\mathrm{e}^{-y^2}\right)$.

2.已知函数 $f(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\sin t\mathrm{d}t, g(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\cdot\sin^2 x$，则(　　)

A. $x=0$ 为 $f(x)$ 的极值点，也是 $g(x)$ 的极值点

B. $x=0$ 为 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 是曲线 $y=g(x)$ 的拐点

C. $x=0$ 为 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

D. $(0,0)$ 为 $y=f(x)$ 的拐点，也是曲线 $y=g(x)$ 的拐点+

【答案】B.

【解】方法一 利用泰勒级数

$$\mathrm{e}^{t^2}\sin t=\left(1+t^2+\cdots\right)\left(t+\cdots\right)=t+\cdots\Rightarrow f\left(x\right)=\int_0^x\left(t+\cdots\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}x^2+\cdots,\ \text{可得}$$

$f'\left(0\right)=0,f''\left(0\right)=1$，所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极值点；

$$g(x)=\left(\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)\cdot\sin^2x=\left(\int_0^x\left(1+t^2+\cdots\right)\mathrm{d}t\right)\cdot\sin^2x=\left(x+\cdots\right)\left(x^2+\cdots\right)=x^3+\cdots$$

$$\Rightarrow g''\left(0\right)=0,g'''\left(0\right)=6\neq0,$$ $(0,0)$ 是曲线 $y=g(x)$ 的拐点.故选 B.

方法二：由于

$$f'(x)=\mathrm{e}^{x^2}\sin x,f''\left(x\right)=2x\mathrm{e}^{x^2}\sin x+\mathrm{e}^{x^2}\cos x\Rightarrow f'\left(0\right)=0,f''\left(0\right)=1\neq0,$$

所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极值点；

由于 $g'(x)=\left(\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)\cdot\sin2x+\mathrm{e}^{x^2}\sin^2x,$,

$$g''(x)=\left(\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)\cdot2\cos2x+2\mathrm{e}^{x^2}\cdot\sin2x+2x\mathrm{e}^{x^2}\sin^2x\ ,$$

$$g'''(x)=6\mathrm{e}^{x^2}\cos2x+\left(\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)\cdot\left(-4\right)\cos2x+6x\mathrm{e}^{x^2}\cdot\sin2x+2\mathrm{e}^{x^2}\sin^2x+4x^2\mathrm{e}^{x^2}\sin^2x\ ,$$

所以 $g''\left(0\right)=0,g'''\left(0\right)=6\neq0$，$(0,0)$ 是曲线 $y=g(x)$ 的拐点.

3.如果对微分方程 $y''-2ay'+(a+2)y=0$ 的任一解 $y(x)$，反常积分 $\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x$ 均收敛，那么 a 的取值范围是(　　)

A. $(-2,-1]$　　B. $(-\infty,-1]$　　C. $(-2,0)$　　D. $(-\infty,0)$

【答案】C.

【解】微分方程 $y''-2ay'+(a+2)y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2-2a\lambda+(a+2)=0$，两个特征根设为 λ_1,λ_2.要使得反常积分

$$\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left(-\frac{y''}{a+2}+\frac{2a}{a+2}y'\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{1}{a+2}y'+\frac{2a}{a+2}y\right)\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{a+2}y'+\frac{2a}{a+2}y\right)-\left[-\frac{1}{a+2}y'(0)+\frac{2a}{a+2}y(0)\right]$$ 收敛，即

极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{a+2}y'+\frac{2a}{a+2}y\right)$ 存在，由二阶常系数齐次线性微分方程解的结构知，特征根需满足 $\lambda_1+\lambda_2=2a<0,\lambda_1\lambda_2=a+2>0$，解得 $-2<a<0$.

4.设函数 $f(x),g(x)$ 在 $x=0$ 的某去心邻域内有定义且恒不为零.若当 $x\to0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小，则当 $x\to0$ 时，(　　)

A. $f(x)+g(x)=o(g(x))$　　B. $f(x)\cdot g(x)=o(f^2(x))$

C. $f(x)=o(\mathrm{e}^{g(x)}-1)$　　D. $f(x)=o(g^2(x))$

【答案】C.

【解】当 $x\to0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小，从而 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$.

选项 A：$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+g(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}+\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)}{g(x)}=1\neq0$，从而 $f(x)+g(x)\neq o(g(x))$，故 A 错；

选项 B：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\cdot g(x)}{f^2(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\infty$，从而 $f(x)\cdot g(x)\neq o(f^2(x))$，故 B 错；

选项 C：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{e^{g(x)}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，故 $f(x)=o(e^{g(x)}-1)$，从而 C 正确；

选项 D：无法判定，例如 $f(x)=x^2,g(x)=x$，则 $f(x)=o(g(x))$，但 $f(x)\neq o(g^2(x))$；再入 $f(x)=x^3,g(x)=x$，则 $f(x)=o(g(x))$，且 $f(x)=o(g^2(x))$，故 D 错.答案选 C.

5. 设函数 $f(x,y)$ 连续，则 $\int_{-2}^{2}dx\int_{4-x^2}^{4}f(x,y)dy=$ （ ）

A. $\int_0^4\left[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}}f(x,y)dx+\int_{\sqrt{4-y}}^{2}f(x,y)dx\right]dy$

B. $\int_0^4\left[\int_{-2}^{\sqrt{4-y}}f(x,y)dx+\int_{\sqrt{4-y}}^{2}f(x,y)dx\right]dy$

C. $\int_0^4\left[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}}f(x,y)dx+\int_{2}^{\sqrt{4-y}}f(x,y)dx\right]dy$

D. $2\int_0^4 dy\int_{\sqrt{4-y}}^{2}f(x,y)dx$

【答案】A.

【解】积分区域如图所示，将积分区域表示为 Y 型区域为：$D=D_1\cup D_2$，其中

$D_1:\begin{cases}-2\le x\le-\sqrt{4-y}\\0\le y\le 4\end{cases}$，$D_2:\begin{cases}\sqrt{4-y}\le x\le 2\\0\le y\le 4\end{cases}$，所以

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}dx\int_{4-x^2}^{4}f(x,y)dy&=\int_0^4dy\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}}f(x,y)dx+\int_0^4dy\int_{\sqrt{4-y}}^{2}f(x,y)dx\\&=\int_0^4\left[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}}f(x,y)dx+\int_{\sqrt{4-y}}^{2}f(x,y)dx\right]dy.\end{aligned}$$

答案选 A.

【注】对于选项 D 利用积分区域的对称性，

$$\int_{-2}^{2}\mathrm{d}x\int_{4-x^2}^{4}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{0}^{4}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{4-y}}^{2}[f(x,y)+f(-x,y)]\mathrm{d}x,$$

如果进一步有条件 $f(x,y)=f(-x,y)$，则

$$\int_{-2}^{2}\mathrm{d}x\int_{4-x^2}^{4}f(x,y)\mathrm{d}y=2\int_{0}^{4}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{4-y}}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

6.设单位质点 P,Q 分别位于点 $(0,0)$ 和 $(0,1)$ 处，P 从点 $(0,0)$ 出发沿 x 轴正向移动，记 G 为引力常量，则当质点 P 移动到点 $(l,0)$ 时，克服质点 Q 的引力所做的功为(　　)

A. $\int_{0}^{l}\frac{G}{x^2+1}\mathrm{d}x$　　B. $\int_{0}^{l}\frac{Gx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$　　C. $\int_{0}^{l}\frac{G}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$　　D. $\int_{0}^{l}\frac{G(x+1)}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$

【答案】B.

【解】对于任意区间 $[x,x+\mathrm{d}x]\subset[0,l]$ 上，点 $(x,0)$ 到 $(0,1)$ 的距离 $r=\sqrt{1+x^2}$，故质点 Q 对质点 P 的引力为：$dF=G\frac{1}{x^2+1}$.

由于质点 P 沿 x 轴运动，故只有水平方向克服引力做功，且水平方向的引力

$$dF_x=G\frac{1}{x^2+1}\cdot\cos\theta=G\frac{1}{x^2+1}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=G\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}},$$

从而克服质点 Q 的引力所做的功为 $W=\int_{0}^{l}G\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$，答案选 B.

7.设函数 $f(x)$ 连续，给出下列四个条件

① $\lim\limits_{x\to0}\frac{|f(x)|-f(0)}{x}$ 存在；② $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-|f(0)|}{x}$ 存在；

③ $\lim\limits_{x\to0}\frac{|f(x)|}{x}$ 存在；　　④ $\lim\limits_{x\to0}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x}$ 存在；

其中能得到“ $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导”的条件个数是(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】D.

【解】①设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|f(x)|-f(0)}{x}=A$ 存在.

由于 $f(x)$ 连续，由极限的运算法则知，$\lim\limits_{x\to0}\left[|f(x)|-f(0)\right]=|f(0)|-f(0)=0$，从而 $f(0)\ge0$.

(1) 若 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|f(x)|}{x}=A$，从而 $A=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{|f(x)|}{x}=-\lim\limits_{x\to0^-}\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|$，即 $\lim\limits_{x\to0^-}\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|=-A\ge0$，同理可得，$\lim\limits_{x\to0^+}\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|=A\ge0$，从而 $A=0$，故 $\lim\limits_{x\to0}\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|=0$.从而 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(2)若 $f(0)>0$，由于 $f(x)$ 连续，所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)>0$，由保号性知，存在 $\delta>0$，使得当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时，有 $f(x)>0$ 成立.

于是 $A=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|f(x)|-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$ 存在.

综上所述 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|f(x)|-f(0)}{x}$ 存在，可得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

②设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-|f(0)|}{x}=A$ 存在.

由于 $f(x)$ 连续，由极限的运算法则知，$\lim\limits_{x\to0}\left[f(x)-|f(0)|\right]=f(0)-|f(0)|=0$，从而 $f(0)\ge0$.

(1)若 $f(0)=0$，则 $A=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-|f(0)|}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$.从而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(2)若 $f(0)>0$，则 $A=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-|f(0)|}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$.从而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

综上所述，极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-|f(0)|}{x}$ 存在，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

③设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|f(x)|}{x}=A$ 存在，由对①的讨论知， $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

④设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|f(x)|-|f(0)|}{x}=A$ 存在.

(1)若 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|f(x)|}{x}=A$，由③知， $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(2)若 $f(0)\neq 0$，则不妨设 $f(0)>0$，由于 $f(x)$ 连续，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)>0$，由保号性知，存在 $\delta>0$，使得当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时，有 $f(x)>0$ 成立.

于是 $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|f(x)|-|f(0)|}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$，从而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

同理若 $f(0)<0$，则由保号性知，存在 $\delta>0$，使得当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时，有 $f(x)<0$ 成立.于是 $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|f(x)|-|f(0)|}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-f(x)+f(0)}{x}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=-f'(0)$，从而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

8.设矩阵 $\begin{pmatrix}1&2&0\\2&a&0\\0&0&b\end{pmatrix}$ 有一个正特征值和两个负特征值，则(　　)

A. $a>4,b>0$　　B. $a<4,b>0$　　C. $a>4,b<0$　　D. $a<4,b<0$

【答案】D.

【解】设矩阵 $\begin{pmatrix}1&2&0\\2&a&0\\0&0&b\end{pmatrix}$ 的三个特征值分别为 $\lambda_1>0,\lambda_2<0,\lambda_3<0$，则

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\begin{vmatrix}1&2&0\\2&a&0\\0&0&b\end{vmatrix}=b(a-4)>0$$，从而 $b>0,a>4$ 或 $b<0,a<4$.

又$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda-a & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-b \end{vmatrix}=(\lambda-b)\left[(\lambda-1)(\lambda-a)-4\right]=0$，解得

$$\lambda=b，(\lambda-1)(\lambda-a)-4=\lambda^2-(a+1)\lambda+a-4=0$$

若$\lambda_1=b>0$，则$\lambda_2+\lambda_3=a+1<0,\lambda_2\lambda_3=a-4>0$，解得$a<-1$及$a>4$矛盾，从而$b<0$，故答案选D.

9.下列矩阵中，可以经过若干初等行变换得到矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$的是(　　)

A.$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$　B.$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$　C.$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　D.$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

【答案】B.

【解】$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_2]{r_2\div 2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，故答案选B.

10.设3阶矩阵A,B满足$r(AB)=r(BA)+1$,则(　　)

A.方程组$(A+B)x=0$只有零解

B.方程组$Ax=0$与方程组$Bx=0$均只有零解

C.方程组$Ax=0$与方程组$Bx=0$没有公共非零解

D.方程组$ABAx=0$与方程组$BABx=0$有公共非零解

【答案】D.

【解】由$r(AB)=r(BA)+1$知，矩阵A,B均不可逆，且$r(BA)+1=r(AB)\le 2$，从而$r(BA)\le 1$.

选项 A：设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $r(AB)=1,r(BA)=0$，从而 $r(AB)=r(BA)+1$，且 $A+B=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$r(A+B)=2<3$，从而方程组 $(A+B)x=0$ 有非零解，故 A 错.

选项 B：由选项 A 的例子可知，方程组 $Ax=0$ 与方程组 $Bx=0$ 均有非零解，故 B 错.

选项 C：由选项 A 的例子可知，$r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=2<3$，故方程组 $\begin{cases}Ax=0\\Bx=0\end{cases}$ 有非零解，从而方程组 $Ax=0$ 与方程组 $Bx=0$ 有非零公共解，故 C 错.

选项 D：由秩的性质知，$r(ABA)\le r(BA)\le 1,r(BAB)\le r(BA)\le 1$，故

$$r\begin{pmatrix}ABA\\BAB\end{pmatrix}\le r(ABA)+r(BAB)\le 1+1=2,$$

从而方程组 $\begin{cases}ABAx=0\\BABx=0\end{cases}$ 有非零解，即方程组 $ABAx=0$ 与方程组 $BABx=0$ 有公共非零解.

二、填空题：11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11.设 $\int_1^{+\infty}\frac{a}{x(2x+a)}\mathrm{d}x=\ln 2$，则 $a=$______.

【答案】2.

【解】

$$\ln 2=\int_1^{+\infty}\frac{a}{x(2x+a)}\mathrm{d}x=2\int_1^{+\infty}\frac{a}{2x(2x+a)}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{2x+a}\right)\mathrm{d}(2x)=\ln\frac{2x}{2x+a}\Bigg|_1^{+\infty}$$

$$=-\ln\frac{2}{2+a}=\ln\left(1+\frac{a}{2}\right),$$

从而 $2=1+\frac{a}{2}$，解得 $a=2$

12.曲线 $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}$ 的渐近线方程为______.

【答案】$y=x-1$.

【解】方法一：

$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}=\infty$，故曲线 $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}$ 无水平渐近线.

$y=\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，从而曲线 $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}$ 无铅直渐近线.

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt[3]{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}\right)=-1.$$

从而斜渐近线为 $y=x-1$.

方法二：

$$y=\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}=x\sqrt[3]{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}}=x\left(1+\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}\right)+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=x-1+x\cdot o(\frac{1}{x})$$

从而斜渐近线为 $y=x-1$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left[\ln\frac{1}{n}+2\ln\frac{2}{n}+\cdots+(n-1)\ln\frac{n-1}{n}\right]=$ ________.

【答案】$-\frac{1}{4}$.

【解】

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left[\ln\frac{1}{n}+2\ln\frac{2}{n}+\cdots+(n-1)\ln\frac{n-1}{n}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\ln\frac{2}{n}+\cdots+\frac{(n-1)}{n}\ln\frac{n-1}{n}+\frac{n}{n}\ln\frac{n}{n}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\ln\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 x\ln x dx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 xdx=-\frac{1}{4}$$

14.已知函数 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=\ln(1+2t)\\ 2t-\int_1^{y+t^2}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=0\end{cases}$ 确定，则 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=$________.

【答案】e.

【解】当 $t=0$ 时，$-\int_1^y \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=0$ 解得 $y=1$.又 $\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\left.\frac{2}{1+2t}\right|_{t=0}=2$.

方程 $2t-\int_1^{y+t^2}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=0$ 两端同时对 t 求导，得 $2-e^{-(y+t^2)^2}(y'+2t)=0\cdots\cdots①$.

将 $t=0$，$y=1$ 代入①式，得 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=2\mathrm{e}$.从而 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\mathrm{e}$.

15.微分方程 $(2y-3x)\mathrm{d}x+(2x-5y)\mathrm{d}y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解为_______.

【答案】$5y^2-4xy+3x^2=4$.

【解】由条件知 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2y-3x}{5y-2x}=\frac{2\frac{y}{x}-3}{5\frac{y}{x}-2}$，令 $u=\frac{y}{x}$ 解得 $y=ux$，两端对 x 求导，得 $y'=u+xu'$.于是 $u+xu'=\frac{2u-3}{5u-2}$，整理，得 $\frac{5u-2}{5u^2-4u+3}\mathrm{d}u=-\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.两端积分

$\int\frac{5u-2}{5u^2-4u+3}\mathrm{d}u=-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x$，即 $\int\frac{10u-4}{5u^2-4u+3}\mathrm{d}u=-2\ln|x|+\ln|C|$，从而

$\ln\frac{|C|}{x^2}=\int\frac{1}{5u^2-4u+3}\mathrm{d}(5u^2-4u+3)=\ln|5u^2-4u+3|$，解得 $5u^2-4u+3=\frac{C}{x^2}$，又 $u=\frac{y}{x}$，所以微分方程的通解为 $5y^2-4xy+3x^2=C$.又由 $y(1)=1$，得 $C=4$，从而满足初始条件 $y(1)=1$ 的特解为 $5y^2-4xy+3x^2=4$.

16.设矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，且 $\alpha_1+\alpha_2=\alpha_3+\alpha_4$，则方程组 $Ax=\alpha_1+4\alpha_4$ 的通解为 $x=$ ________.

【答案】$x=C\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\\4\end{pmatrix}$，其中 C 为任意常数.

【解】由 $\alpha_1+\alpha_2=\alpha_3+\alpha_4$，得 $\alpha_4=-\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$，故 α_4 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，又 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，故 $r(A)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，从而齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系中含有一个解向量.又由 $\alpha_1+\alpha_2=\alpha_3+\alpha_4$ 知，

$$\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}=0,$$

从而 $\xi=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ 为 $Ax=0$ 的基础解系.

又 $\alpha_1+4\alpha_4=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\4\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\0\\0\\4\end{pmatrix}=A\eta$，故 $\eta=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\4\end{pmatrix}$ 为方程组 $Ax=\alpha_1+4\alpha_4$

的特解，从而方程组 $Ax=\alpha_1+4\alpha_4$ 同解为 $x=C\xi+\eta$，其中 C 为任意常数.

三、解答题：17~22小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.(本题满分10分)

计算 $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2-2x+2)}\mathrm{d}x$.

【解】 $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2-2x+2)}\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{1}{(x+1)\left[\left(x-1\right)^2+1\right]}\mathrm{d}x \overset{x-1=t}{=} \int_{-1}^0 \frac{1}{(t+2)\left(t^2+1\right)}\mathrm{d}t$

$=\frac{1}{5}\int_{-1}^0\left(\frac{1}{t+2}+\frac{-t+2}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{5}\left(\ln\left(t+2\right)-\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)+2\arctan x\right)\Big|_{-1}^0$

$=\frac{1}{5}\left[\ln 2-\left(-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{1}{5}\left(\frac{3}{2}\ln 2+\frac{\pi}{2}\right)$.

18.(本题满分12分)

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xf(x)-\mathrm{e}^{2\sin x}+1}{\ln(1+x)+\ln(1-x)}=-3$，证明：$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，并求 $f'(0)$.

【解】方法一：

由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xf(x)-\mathrm{e}^{2\sin x}+1}{\ln(1+x)+\ln(1-x)}=-3$ 可得

$$
\begin{aligned}
-3&=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\mathrm{e}^{2\sin x}+1}{\ln(1+x)+\ln(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\mathrm{e}^{2\sin x}+1}{\ln(1-x^2)}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\left[1+2\sin x+\frac{1}{2}\left(2\sin x\right)^2+o\left(x^2\right)\right]+1}{-x^2}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-2\sin x-2\sin^2 x+o\left(x^2\right)}{-x^2}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-2x-2x^2+o\left(x^2\right)}{-x^2}=2-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x}.
\end{aligned}
$$

从而有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{x}=5$.

已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2$. 故

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x}=5.$$

方法二：

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-e^{2\sin x}+1}{\ln(1+x)+\ln(1-x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-e^{2\sin x}+1}{\ln(1-x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-e^{2\sin x}+1}{-x^2}=-3$，由极限和无穷小的关系知，$f(x)=\dfrac{e^{2\sin x}-1}{x}-(-3+\alpha)x$，其中 $\lim\limits_{x\to 0}\alpha=0$ 由于 $f(x)$ 连续，所以

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^{2\sin x}-1}{x}-(-3+\alpha)x\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2\sin x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{x}=2$$

从而

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{2\sin x}-1}{x}-(-3+\alpha)x-2}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2\sin x}-1-(-3+\alpha)x^2-2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2\sin x}-1-2x}{x^2}+3$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+2\sin x+\frac{1}{2}(2\sin x)^2+o\left(x^2\right)-1-2x}{x^2}+3$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-2x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(2\sin x)^2+o\left(x^2\right)}{x^2}+3=0+2+3=5$$

19.(本题满分 12 分)

设函数 $f(x,y)$ 可微且满足 $\mathrm{d}f(x,y)=-2xe^{-y}\mathrm{d}x+e^{-y}(x^2-y-1)\mathrm{d}y$，$f(0,0)=2$，求 $f(x,y)$，并求 $f(x,y)$ 的极值.

【解】由题意知$\dfrac{\partial f}{\partial x}=-2x\mathrm{e}^{-y},\dfrac{\partial f}{\partial y}=\mathrm{e}^{-y}(x^2-y-1)$，于是

$$f(x,y)=\int\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x=-\int 2x\mathrm{e}^{-y}dx=-x^2\mathrm{e}^{-y}+\varphi(y),$$

又$\dfrac{\partial f}{\partial y}=x^2\mathrm{e}^{-y}+\varphi'(y)$，且$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\mathrm{e}^{-y}(x^2-y-1)$，解得$\varphi'(y)=-(y+1)e^{-y}$，从而

$\varphi(y)=-\int(y+1)\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=(y+2)\mathrm{e}^{-y}+C$，故$f(x,y)=-x^2\mathrm{e}^{-y}+(y+2)\mathrm{e}^{-y}+C$，又

$f(0,0)=2$，得$C=0$.从而$f(x,y)=-x^2\mathrm{e}^{-y}+(y+2)\mathrm{e}^{-y}$.

令$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=-2x\mathrm{e}^{-y}=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=\mathrm{e}^{-y}(x^2-y-1)=0,\end{cases}$ 解得驻点为$(0,-1)$.又

$$A=f_{xx}''(0,-1)=-2\mathrm{e}^{-y}\Big|_{(0,-1)}=-2\mathrm{e},$$
$$B=f_{xy}''(0,-1)=2x\mathrm{e}^{-y}\Big|_{(0,-1)}=0,$$
$$C=f_{yy}''(0,-1)=-\mathrm{e}^{-y}(x^2-y-1)-\mathrm{e}^{-y}\Big|_{(0,-1)}=-\mathrm{e}$$

从而$AC-B^2=2\mathrm{e}^2>0$，且$A<0$，故$(0,-1)$为极大值点，且极大值为$f(0,-1)=\mathrm{e}$.

20.(本题满分12分)

已知平面有界区域$D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4x,x^2+y^2\le 4y\right\}$，计算$\iint\limits_D(x-y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

【解】设$f(x,y)=(x-y)^2$，则$f(x,y)=f(y,x)$.区域D关于$y=x$对称，设D_1为区域D位于$y=x$下方的部分，则 $D_1=\{(r,\theta)\,|\,0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4},0\le r\le 4\sin\theta\}$，从而

$$\iint\limits_D(x-y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1}(x-y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{4\sin\theta}\left(r\cos\theta-r\sin\theta\right)^2\cdot rdr$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos\theta-\sin\theta)^2\,\mathrm{d}\theta\int_0^{4\sin\theta}r^3dr$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-2\sin\theta\cos\theta)\cdot\frac{1}{4}(4\sin\theta)^4\,\mathrm{d}\theta$$

$$=32\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin2\theta)\cdot\left(2\sin^2\theta\right)^2\mathrm{d}\theta$$

$$=32\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin2\theta)\cdot(1-\cos2\theta)^2\mathrm{d}\theta$$

$$\underline{\underline{t=2\theta}}16\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin t)\cdot(1-\cos t)^2\mathrm{d}t$$

$$=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos t)^2\mathrm{d}t-16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cdot(1-\cos t)^2\mathrm{d}t$$

$$=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-2\cos t+\cos^2t\right)\mathrm{d}t-16\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos t)^2\mathrm{d}(1-\cos t)$$

$$=16\left(\frac{\pi}{2}-2+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)-\frac{16}{3}(1-\cos t)^3\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=12\pi-\frac{112}{3}.$$

21.(本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 可导，证明：$f'(x)$ 在 (a,b) 内严格单增的充分必要条件是对 (a,b) 内任一点 x_1,x_2,x_3，当 $x_1<x_2<x_3$ 时 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$.

【证明】先证必要性：设 $f'(x)$ 在 (a,b) 内严格单增. $\forall x_1<x_2<x_3\in(a,b)$，由拉格朗日中值定理可得，

$\exists\xi_1\in(x_1,x_2),\xi_2\in(x_2,x_3)$，使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi_1),\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}=f'(\xi_2)$$

因为 $f'(x)$ 在 (a,b) 内严格单增，所以 $f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$，故 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$.

再证充分性：设当 $x_1<x_2<x_3$ 时，$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$.下面证明

$f'(x)$ 在 (a,b) 内严格单增.

$\forall x_1<x_2\in(a,b)$，取 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，则由条件可得，$\forall h>0$ (足够小)，有

$$\frac{f(x_1)-f(x_1-h)}{h}<\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}<\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}<\frac{f(x_2+h)-f(x_2)}{h}$$

所以 $f'(x_1)=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{f(x_1)-f(x_1-h)}{h}\le\dfrac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}$,

$f'(x_2)=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{f(x_2+h)-f(x_2)}{h}\ge\dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$，故 $f'(x_1)<f'(x_2)$，即 $f'(x)$ 在

(a,b) 内严格单增.

22.(本题满分 12 分)

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}4&1&-2\\1&1&1\\-2&1&a\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}k&0&0\\0&6&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 合同.

(1)求 a 的值及 k 的取值范围;

(2)若存在正交矩阵 Q,使得 $Q^TAQ=B$,求 k 及 Q.

【解】(1)由于实对称矩阵 A,B 合同，所以矩阵 A,B 的秩相同，即 $r(A)=r(B)$，且

$r(B)\le2$，从而 $r(A)\le2$，又 A 的第一、二两行对应不成比例，从而 $r(A)\ge2$，故 $r(A)=2$.

于是 $|A|=\begin{vmatrix}4&1&-2\\1&1&1\\-2&1&a\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_2]{r_1-r_2}\begin{vmatrix}3&0&-3\\1&1&1\\-3&0&a-1\end{vmatrix}=3(a-1)-9=0$，解得 $a=4$.

又

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & -1 & 2\\ -1 & \lambda-1 & -1\\ 2 & -1 & \lambda-4\end{vmatrix}\underline{\underline{r_1-r_3}}\begin{vmatrix}\lambda-6 & 0 & 6-\lambda\\ -1 & \lambda-1 & -1\\ 2 & -1 & \lambda-4\end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{c_3+c_1}}\begin{vmatrix}\lambda-6 & 0 & 0\\ -1 & \lambda-1 & -2\\ 2 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-6)\left[(\lambda-1)(\lambda-2)-2\right]=\lambda(\lambda-3)(\lambda-6)=0$$

解得矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=3,\lambda_2=6,\lambda_3=0$．又矩阵 B 为对角阵，特征值分别为 $\mu_1=k,\mu_2=6,\mu_3=0$，且矩阵 A,B 正、负特征值的个数相同，从而 $k>0$．

(2)若存在正交矩阵 Q，使得 $Q^TAQ=B$，又 $Q^T=Q^{-1}$，则 $Q^{-1}AQ=B$，即矩阵 A,B 相似，从而 A,B 的特征值相同，可得 $k=3$．

当 $\lambda_1=3$ 时，$3E-A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ -1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，解得特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$．

当 $\lambda_2=6$ 时，$6E-A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ -1 & 5 & -1\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，解得特征向量为 $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$．

当 $\lambda_3=0$ 时，$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，解得特征向量为 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$．

令 $Q=\left(\dfrac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|},\dfrac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|},\dfrac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3} & -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6}\\ \frac{1}{\sqrt3} & 0 & -\frac{2}{\sqrt6}\\ \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}$，则 $Q^TAQ=B$