2025 年全国硕士研究生招生考试

(数学一)

一、选择题:1~10 小题，每小题 5 分，共 50 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选 项是最符合题目要求的．

1.已知函数 $f(x)=\int_0^x e^{t^2}\sin t\,dt, g(x)=\int_0^x e^{t^2}dt\cdot\sin^2 x$ ，则 (　　).

A. $x=0$ 为 $f(x)$ 的极值点，也是 $g(x)$ 的极值点

B. $x=0$ 为 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 是曲线 $y=g(x)$ 的拐点

C. $x=0$ 为 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

D. $(0,0)$ 为 $y=f(x)$ 的拐点，也是曲线 $y=g(x)$ 的拐点

【答案】B.

【解】方法一 利用泰勒级数

$e^{t^2}\sin t=(1+t^2+\cdots)(t-\cdots)=t+\cdots$，$f(x)=\int_0^x(t+\cdots)dt=\frac{1}{2}x^2+\cdots$，从而可得

$f'(0)=0, f''(0)=1$，所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极值点；

$$g(x)=\int_0^x e^{t^2}dt\cdot\sin^2 x=\int_0^x(1+t^2+\cdots)dt\cdot\sin^2 x=(x+\cdots)(x^2+\cdots)=x^3+\cdots$$

$g''(0)=0, g'''(0)=6\neq 0$，$(0,0)$ 是曲线 $y=g(x)$ 的拐点.故选 B.

方法二：

由于 $f'(x)=e^{x^2}\sin x, f''(x)=2xe^{x^2}\sin x+e^{x^2}\cos x$，$f'(0)=0, f''(0)=1>0$，

所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极值点；

由于

$$g'(x)=\int_0^x e^{t^2}dt\cdot\sin 2x+e^{x^2}\sin^2 x,$$

$$g''(x)=\int_0^x e^{t^2}dt\cdot 2\cos 2x+2e^{x^2}\sin 2x+2xe^{x^2}\sin^2 x,$$

$$g'''(x)=6e^{x^2}\cos 2x-\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)(-4\cos 2x)-6xe^{x^2}\sin 2x$$

$$+2e^{x^2}\sin^2 x+4x^2e^{x^2}\sin^2 x,$$

所以 $g''(0)=0, g'''(0)=6\neq 0$，$(0,0)$ 是曲线 $y=g(x)$ 的拐点.

2.已知级数① $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n^3\pi}{n^2+1}$；② $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}-\tan\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$，则(　　).

A.①②都条件收敛　　　　B.①条件收敛，②绝对收敛

C.①绝对收敛，②条件收敛　　　　D.①②都绝对收敛

【答案】B.

【解】对于① $\sin\frac{n^3\pi}{n^2+1}=\sin\left(n\pi-\frac{n}{n^2+1}\pi\right)=(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{n\pi}{n^2+1}\right)$，

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n^3\pi}{n^2+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{n\pi}{n^2+1}\right)$为交错级数，且$\left\{\sin\left(\frac{n\pi}{n^2+1}\right)\right\}$单调递减且趋于零，故

$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n^3\pi}{n^2+1}$收敛；又由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sin\frac{n^3\pi}{n^2+1}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{n^2+1}\right)$，$\sin\left(\frac{n\pi}{n^2+1}\right)\sim\frac{n\pi}{n^2+1}\sim\frac{\pi}{n}$，

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sin\frac{n^3\pi}{n^2+1}\right|$

发散.综上所述，级数①条件收敛.

对于② $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}-\tan\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$，由于

$$\left|(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}-\tan\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)\right|=\tan\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\sim\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)^3=\frac{1}{3n^2},$$

所以②绝对收敛.答案选 B.

3.函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 可导，则(　　)

A.若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在

B.若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在

C.若 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在

D.若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}$ 存在

【答案】D.

【解】对于选项 A：取 $f(x)=\dfrac{\sin\left(x^2\right)}{x}$, 则

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(x^2\right)}{x}=0,\ f'(x)=-\frac{1}{x^2}\sin\left(x^2\right)+2\cos\left(x^2\right),$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}\sin\left(x^2\right)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}2\cos\left(x^2\right)$ 不存在，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 不存在，故 A 错误；

对于选项 B：取 $f(x)=x$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=1$, 但 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ 不存在，故 B 错误；

对于选项 C: 取 $f(x)=\cos x$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$，但是 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 不存在，故 C 错误；

对于选项 D：若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ (存在)，则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}\overset{\text{洛必达}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{1}=\lim_{x\to+\infty} f(x)=A.$$ 故 D 正确.

答案选 D.

【注】我们对 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型洛必达法则做一点补充说明:很多高等数学或微积分教材中给出的结论是

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{f(x)}{g(x)}\ \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)\\ \lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A(\infty)\end{cases}\quad \lim\limits_{x\to\cdot}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\cdot}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A(\infty).$$ 一般地，

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{f(x)}{g(x)}\ \left(\dfrac{*}{\infty}\right)\\ \lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A(\infty)\end{cases}\quad \lim\limits_{x\to\cdot}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\cdot}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A(\infty),$$ 即我们对分子 $f(x)$ 的极限不做要求.

4.设函数 $f(x,y)$ 连续，则 $\int_{-2}^{2}dx\int_{4-x^2}^{4}f(x,y)dy=$ ( )

A. $\int_0^4\left[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}}f(x,y)dx+\int_{\sqrt{4-y}}^{2}f(x,y)dx\right]dy$

B. $\int_0^4\left[\int_{-2}^{\sqrt{4-y}}f(x,y)dx+\int_{\sqrt{4-y}}^{2}f(x,y)dx\right]dy$

C. $\int_0^4\left[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}}f(x,y)dx+\int_{2}^{\sqrt{4-y}}f(x,y)dx\right]dy$

D. $2\int_0^4 dy\int_{\sqrt{4-y}}^{2}f(x,y)dx$

【答案】A.

【解】积分区域如图所示，将积分区域表示为 Y 型区域为：$D=D_1\cup D_2$，其中

$D_1:\begin{cases}-2\le x\le -\sqrt{4-y}\\ 0\le y\le 4\end{cases}$，$D_2:\begin{cases}\sqrt{4-y}\le x\le 2\\ 0\le y\le 4\end{cases}$，所以

$$\int_{-2}^{2}dx\int_{4-x^2}^{4}f(x,y)dy=\int_0^4dy\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}}f(x,y)dx+\int_0^4dy\int_{\sqrt{4-y}}^{2}f(x,y)dx$$
$$=\int_0^4\left[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}}f(x,y)dx+\int_{\sqrt{4-y}}^{2}f(x,y)dx\right]dy.$$

答案选 A.

【注】对于选项 D 利用积分区域的对称性，

$\int_{-2}^{2}dx\int_{4-x^2}^{4}f(x,y)dy=\int_0^4dy\int_{\sqrt{4-y}}^{2}\left[f(x,y)+f(-x,y)\right]dx$,如果进一步有条件

$f(x,y)=f(-x,y)$，则 $\int_{-2}^{2}\mathrm{d}x\int_{4-x^2}^{4}f(x,y)\mathrm{d}y=2\int_{0}^{4}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{4-y}}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x$.

5.二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_1x_2-2x_1x_3$ 的正惯性指数为(　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

【答案】B.

解：方法一：配方法

由于

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_1x_2-2x_1x_3=x_1^2-2(x_2+x_3)x_1$$

$$=\left[x_1-(x_2+x_3)\right]^2-(x_2+x_3)^2+0x_3^2$$

故 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的正惯性指数为 1，负惯性指数为 1.答案选 B.

方法二：合同变换法

$f(x_1,x_2,x_3)$ 对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$，对 A 进行合同变换

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[c_2+c_1]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-1&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[c_3+c_1]{r_3+r_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[c_3-c_2]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

故 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的正惯性指数为 1，负惯性指数为 1.

方法三：特征值法

由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&1\\1&\lambda&0\\1&0&\lambda\end{vmatrix}\xrightarrow{r_2-r_3}\begin{vmatrix}\lambda-1&1&1\\0&\lambda&-\lambda\\1&0&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&2\\0&\lambda&0\\1&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda+1)$$

可得，A 的特征值为 $2,-1,0$.故 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的正惯性指数为 1，负惯性指数为 1.

6.设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 n 维列向量，α_1,α_2 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，且

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4=0$，空间坐标系 $o-xyz$ 中关于 x,y,z 的方程 $x\alpha_1+y\alpha_2+z\alpha_3=\alpha_4$ 表示( )

A.过原点的一个平面　　B.过原点的一条直线

C.不过原点的一个平面　　D.不过原点的一条直线

【答案】D

【解】α_1,α_2 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关可得，α_3 可由 α_1,α_2 唯一表示，设

$\alpha_3=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$. 所以 $x\alpha_1+y\alpha_2+z\alpha_3=0$ 的基础解系为 $\xi=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\-1\end{pmatrix}$. 又由于

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4=0$，故 $x\alpha_1+y\alpha_2+z\alpha_3=\alpha_4$ 有特解 $\eta=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$，因此 $x\alpha_1+y\alpha_2+z\alpha_3=\alpha_4$ 的

通解为 $\begin{cases}x=-1+ck_1\\y=-1+ck_2\\z=-c\end{cases}$，即方程 $x\alpha_1+y\alpha_2+z\alpha_3=\alpha_4$ 表示过 $(-1,-1,0)$，方向为 $(k_1,k_2,-1)$

的直线，该直线不过原点.答案选 D.

7.设 n 阶矩阵 A,B,C 满足 $r(A)+r(B)+r(C)=r(ABC)+2n$，给出下列四个结论

① $r(ABC)+n=r(AB)+r(C)$

② $r(AB)+n=r(A)+r(B)$

③ $r(A)=r(B)=r(C)=n$

④ $r(AB)=r(BC)=n$

正确的是( )

A.①②　　B.①③　　C.②④　　D.③④

【答案】A.

【解】方法一：根据选项特点，可以尝试用特例法：取 $r(A)=0,r(B)=r(C)=n$，则 $r(ABC)=0,r(AB)=0,r(BC)=n$，从而排除③④.答案选 A.

方法二：利用矩阵秩的性质 $r(A)+r(B)\le r(AB)+n$ 可得，

$$r(A)+r(B)+r(C)\le r(AB)+n+r(C)\le r(ABC)+2n,$$

由于 $r(A)\quad r(B)\quad r(C) \ll r(ABC)\quad 2n$ ，所以

$$r(A)\quad r(B)\quad r(C) \ll \swarrow r(AB)\quad n \searrow r(C) \ll r(ABC)\quad 2n$$ ，从而

$$r(A)\quad r(B)\quad r(C) \ll \swarrow r(AB)\quad n \searrow r(C) \qquad r(A)\quad r(B) \ll r(AB)\quad n,$$

$$\swarrow r(AB)\quad n \searrow r(C) \ll r(ABC)\quad 2n \qquad r(AB)\quad r(C) \ll r(ABC)\quad n,$$

故答案选 A.

8.设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(0,0;1,1;\quad)$，其中 $\quad(\quad 1,1)$，若 a,b 满足 $a^2\quad b^2 \ll 1$，对任意的实数 $D(aX\quad bY)$ 最大值为(　　)

A. 1　　　　B. 2　　　　C. $1\quad|\quad|$　　　　D. $1\quad{}^2$

【答案】C.

【解】由 $(X,Y) \sim N(0,0;1,1;\quad)$ 知， $X \sim N(0,1), Y \sim N(0,1)$ ，

$\operatorname{cov}(X,Y) \ll \quad \sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)} \ll \quad$ ，利用方差计算公式，得

$$D(aX\quad bY) \ll a^2 D(X)\quad b^2 D(Y)\quad 2ab\operatorname{cov}(X,Y) \ll a^2\quad b^2\quad 2ab \quad . \ll 1\quad 2ab \quad \lfloor\ 1\quad (a^2\quad b^2)|\quad| \ll 1\quad|\quad|$$

【注】由 $a^2\quad b^2 \ll 1$ 可设 $\begin{cases} a \ll \cos \\ b \ll \sin \end{cases}$ ，从而

$$D(aX\quad bY) \ll a^2 D(X)\quad b^2 D(Y)\quad 2ab\operatorname{cov}(X,Y) \ll 1\qquad \sin 2\quad \lfloor\ 1\quad|\quad|.$$

9.设 $X_1, X_2, \cdots, X_{20}$ 是来自总体 $B(1,0.1)$ 的简单随机样本，令 $T \ll \overset{20}{\underset{i\ll}{}} X_i$ ，利用泊松分布近似表示二项分布的方法可得 $P\{T \lfloor\ 1\} \frown$ (　　)

A. $\dfrac{1}{e^2}$　　　　B. $\dfrac{2}{e^2}$　　　　C. $\dfrac{3}{e^2}$　　　　D. $\dfrac{4}{e^2}$

【答案】C.

【解】由于 $T \ll \overset{20}{\underset{i\ll}{}} X_i \sim B \smile 20,0.1 \frown$，所以 $T \overset{近似}{\sim} P \smile 2 \frown$，故

$$P\{T>1\}=1-P\{T=0\}-P\{T=1\}=1-\frac{2^0}{0!}e^{-2}-\frac{2^1}{1!}e^{-2}=1-3e^{-2}.$$

答案选 C.

10.设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,2)$ 的简单随机样本，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$z_\alpha$ 表示标准正态分布的上侧 α 分位数.假设检验问题 H_0: $\mu\le 1$，H_1: $\mu>1$ 的显著性水平为 α，则检验的拒绝域为(　　)

A. $\left\{(X_1,X_2,\cdots,X_n)\,|\,\overline{X}>1+\frac{2}{n}z_\alpha\right\}$。　　B. $\left\{(X_1,X_2,\cdots,X_n)\,|\,\overline{X}>1+\frac{\sqrt{2}}{n}z_\alpha\right\}$

C. $\left\{(X_1,X_2,\cdots,X_n)\,|\,\overline{X}>1+\frac{2}{\sqrt{n}}z_\alpha\right\}$。　　D. $\left\{(X_1,X_2,\cdots,X_n)\,|\,\overline{X}>1+\sqrt{\frac{2}{n}}z_\alpha\right\}$

【答案】D.

【解】由于总体 $X\sim N(\mu,2)$，所以 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N(\mu,\frac{2}{n})$，故检验的拒绝域为

$\frac{\overline{X}-1}{\sqrt{\frac{2}{n}}}>z_\alpha$，解得 $\overline{X}>1+\sqrt{\frac{2}{n}}z_\alpha$，答案选 D.

二、填空题（11~16 小题,每小题 5 分,共 30 分.）

11. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^x-1}{\ln x\,\ln(1-x)}=$________.

【答案】 -1.

【解】$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^x-1}{\ln x\,\ln(1-x)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{x\ln x}-1}{-x\ln x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x\ln x}{-x\ln x}=-1.$

12.已知 $f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<\dfrac{1}{2}\\ x^2, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$ 的傅里叶级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\sin n\pi x$，$S(x)$ 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\sin n\pi x$ 的和函数，则 $S\left(-\dfrac{7}{2}\right)=$________.

【答案】$\dfrac{1}{8}$.

【解】由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\sin n\pi x$ 为 $f(x)$ 的正弦级数，所以由收敛定理可得，

$$S\left(-\frac{7}{2}\right)=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{f\left(\frac{1}{2}^-\right)+f\left(\frac{1}{2}^+\right)}{2}=\frac{\frac{1}{4}+0}{2}=\frac{1}{8}.$$

13.已知函数 $u(x,y,z)=xy^2z^3$，向量 $n=(2,2,-1)$，则 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{(1,1,1)}=$__________.

【答案】1.

【解】

$u(x,y,z)=xy^2z^3\Rightarrow(u_x,u_y,u_z)=(y^2z^3,2xyz^3,3xy^2z^2)\Rightarrow(u_x,u_y,u_z)\big|_{(1,1,1)}=(1,2,3)$

，

将 $n=(2,2,-1)$ 单位化得，$\dfrac{n}{|n|}=\dfrac{1}{3}(2,2,-1)$，故 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{(1,1,1)}=\dfrac{1}{3}(1,2,3)\cdot(2,2,-1)=1$.

14.有向曲线 L 是沿抛物线 $y=1-x^2$ 从点 $(1,0)$ 到点 $(-1,0)$ 的一段，则曲线积分

$\int_L (y+\cos x)\mathrm{d}x+(2x+\cos y)\mathrm{d}y=$________.

【答案】$\dfrac{4}{3}-2\sin 1$.

【解】记 $P(x,y)=y+\cos x, Q(x,y)=2x+\cos y$

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{L+\overline{BA}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y-\int_{\overline{BA}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=I_1-I_2,$$

$$I_1=\int_{L+\overline{BA}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}(1-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4}{3},$$

$$I_2=\int_{\overline{BA}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\cos x\mathrm{d}x=2\sin 1,$$

故 $\int_L(y-\cos x)\mathrm{d}x+(2x-\cos y)\mathrm{d}y=\frac{4}{3}-2\sin 1$.

15.设矩阵 $A=\begin{pmatrix}4&2&3\\a&3&4\\b&5&7\end{pmatrix}$，若方程组 $A^2X=0$ 与 $AX=0$ 有不同的解，则 $a-b=$________.

【答案】 -4.

【解】由于 $AX=0$ 的解一定是 $A^2X=0$ 的解，所以由方程组 $A^2X=0$ 与 $AX=0$ 有不同的解可知，

$$R(A^2)<R(A)\le 2.$$

所以

$$0=|A|=\begin{vmatrix}4&2&3\\a&3&4\\b&5&7\end{vmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}4&2&3\\a-4&1&1\\b-8&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&2&3\\a-b+4&0&0\\b-8&1&1\end{vmatrix}=-(a-b+4),$$

故 $a-b=-4$.

16.设 A,B 为两个随机事件，且相互独立，且 $P(A)=2P(B),P(A\cup B)=\frac{5}{8}$，则在 A,B 至少有一个发生的条件下，A,B 中恰有一个发生的概率为________.

【答案】$\frac{4}{5}$.

【解】由 A,B 相互独立知，$P(AB)=P(A)P(B)$，又由 $P(A)=2P(B),P(A\cup B)=\frac{5}{8}$ 知

$$P(A\cup B)=\frac{5}{8}=P(A)+P(B)-P(AB)=3P(B)-2[P(B)]^2，即$$

$16[P(B)]^2-24P(B)+5=0$，解得 $P(B)=\frac{1}{4}$，从而 $P(A)=\frac{1}{2}$.又 $\bar{A}B\cup A\bar{B}\subset A\cup B$，从而在 A,B 至少有一个发生的条件下，A,B 中恰有一个发生的概率为

$$P(\bar{A}B\cup A\bar{B}\mid A\cup B)=\frac{P(\bar{A}B\cup A\bar{B})}{P(A\cup B)}=\frac{P(\bar{A}B)+P(A\bar{B})}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)+P(B)-2P(AB)}{P(A\cup B)}$$

$$=\frac{P(A)+P(B)-2P(A)P(B)}{P(A\cup B)}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{5}{8}}=\frac{4}{5}.$$

三、解答题：17~22 题，共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17.求 $\int_0^1\frac{1}{(x+1)(x^2-2x+2)}\mathrm{d}x$.

【解】$\int_0^1\frac{1}{(x+1)(x^2-2x+2)}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{(x+1)[(x-1)^2+1]}\mathrm{d}x\overset{x-1=t}{=}\int_{-1}^0\frac{1}{(t+2)(t^2+1)}\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{5}\int_{-1}^0\left(\frac{1}{t+2}+\frac{-t+2}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{5}\left[\ln(t+2)-\frac{1}{2}\ln(t^2+1)+2\arctan t\right]_{-1}^0$$

$$=\frac{1}{5}\left[\ln 2-\left(-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{1}{5}\left(\frac{3}{2}\ln 2+\frac{\pi}{2}\right)$$

18.函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内具有 2 阶导数.记 $g(x,y)=f\left(\frac{x}{y}\right)$，若 $z=g(x,y)$ 满足

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=1，且 g(x,x)=1,\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x,x)}=\frac{2}{x}，求 f(u).$$

【解】$\frac{\partial z}{\partial x}=f'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{1}{y}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=f'\left(\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{x}{y^2}\right)$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''\left(\frac{x}{y}\right)\frac{1}{y^2}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''\left(\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{x}{y^3}\right)-f'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{1}{y^2}，\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''\left(\frac{x}{y}\right)\frac{x^2}{y^4}+f'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{2x}{y^3}，$$

代入等式 $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=1$ 得，$f''\left(\frac{x}{y}\right)\frac{x^2}{y^2}+f'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{x}{y}=1$, 所以

$$u^2f''(u)+uf'(u)=1,\ ①$$

由于 $g(x,x)=1,\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x,x)}=\frac{2}{x}$，所以

$1=g(x,x)=f\left(\frac{x}{x}\right)=f(1)$, $\frac{2}{x}=\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x,x)}=f'\left(\frac{x}{x}\right)=f'(1)\frac{1}{x}$，故 $f(1)=1, f'(1)=2$. ②

方程①为欧拉方程，记 $Y=f(u)$，令 $u=e^t$，方程①变为 $Y''(t)=1$, 所以

$Y=\frac{1}{2}t^2+c_1t+c_2$，

故 $f(u)=\frac{1}{2}(\ln u)^2+c_1\ln u+c_2$，由初始条件②可得 $f(u)=\frac{1}{2}(\ln u)^2+2\ln u+1$.

19.设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 可导，证明：$f'(x)$ 在 (a,b) 内严格单增的充分必要条件是对 (a,b) 内任意的 x_1,x_2,x_3，当 $x_1<x_2<x_3$ 时 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$.

【证明】先证必要性：设 $f'(x)$ 在 (a,b) 内严格单增. $\forall x_1<x_2<x_3\in(a,b)$，由拉格朗日中值定理可得，

$\exists\xi_1\in(x_1,x_2),\xi_2\in(x_2,x_3)$，使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi_1),\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}=f'(\xi_2)$$

因为 $f'(x)$ 在 (a,b) 内严格单增，所以 $f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$，故

$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$.

再证充分性：设当 $x_1 < x_2 < x_3$ 时，$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$. 下面证明 $f'(x)$ 在 (a,b) 内严格单增.

$\forall x_1 < x_2 \in (a,b)$，取 $x_0 = \dfrac{x_1+x_2}{2}$，则由条件可得，$\exists h > 0$ (足够小)，有

$$\frac{f(x_1)-f(x_1-h)}{h} < \frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} < \frac{f(x_2+h)-f(x_2)}{h}$$

所以 $f'(x_1) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_1)-f(x_1-h)}{h} \le \dfrac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}$，

$f'(x_2) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_2+h)-f(x_2)}{h} \ge \dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$，故 $f'(x_1) < f'(x_2)$，即 $f'(x)$ 在 (a,b) 内严格单增.

20.设 Σ 是由直线 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ 绕直线 $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$ (t 为参数)旋转一周所得的曲面，Σ_1 是 Σ 介于 $x+y+z=0$ 与 $x+y+z=1$ 之间部分的外侧，计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

【解】锥面 Σ 的旋转轴 $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$ 与平面 $x+y+z=1$ 的交点为 $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$，又点 $(0,0,1)$ 在平面 $x+y+z=1$ 及锥面 Σ 上，故平面 $x+y+z=1$ 被锥面 Σ 截下的部分为圆心在 $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$，半径为 $r=\sqrt{(0-\frac{1}{3})^2+(0-\frac{1}{3})^2+(1-\frac{1}{3})^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}$ 的圆域.

记平面 $x+y+z=1$ 被锥面 截下的部分为 Σ_2，取其上侧，则 Σ_2 的方向余弦为 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.记 Σ_1,Σ_2 围成的封闭区域为 Ω，则 Ω 为顶点在原点，底面为 Σ_2 的圆锥，从而

$$I=\oiint_{\Sigma_1+\Sigma_2} x\,dydz+(y+1)dzdx+(z+2)dxdy-\iint_{\Sigma_2} x\,dydz+(y+1)dzdx+(z+2)dxdy$$

$$=\iiint_{\Omega}(1+1+1)dxdydz-\iint_{\Sigma_2}\left[x\cos\alpha+(y+1)\cos\beta+(z+2)\cos\gamma\right]dS$$

$$=3\iiint_{\Omega}dxdydz-\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma_2}\left[x+(y+1)+(z+2)\right]dS$$

又圆锥 Ω 的高为原点到平面 $x+y+z=1$ 的距离 $d=\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\Sigma_2$ 的面积为 $S=\pi\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2$，从而 $\iiint_{\Omega}dxdydz=\frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$.且 $\iint_{\Sigma_2}(x+y+z+3)dS=4\iint_{\Sigma_2}dS=4\pi\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2=\frac{8}{3}\pi$，故

$$I=3\cdot\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}-\frac{8}{3\sqrt{3}}\pi=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}-\frac{8\pi}{3\sqrt{3}}=-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

21.设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}$，已知1是 A 的特征多项式的重根.

(1)求 a 的值；

(2)求所有满足 $A\alpha=\beta, A^2\alpha=\alpha+2\beta$ 的所有非零解向量.

【解】(1)

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -2 \\ 1 & \lambda & -2 \\ 1 & 1 & \lambda - a \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 - r_2} (\lambda - 1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & -2 \\ 1 & 1 & \lambda - a \end{vmatrix} = (\lambda - 1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda + 1 & -2 \\ 1 & 2 & \lambda - a \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 1)[\lambda^2 + (1 - a)\lambda - a + 4],$$

由题设可知 $\lambda = 1$ 是 $\lambda^2 + (1-a)\lambda - a + 4 = 0$ 的根，所以 $a = 3$.

(2)由 $a = 3$ 可得，$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.由于 $A \quad = \quad , A^2 \quad = \quad 2 \quad$，所以

$2 \quad = A^2 \quad = A(A \quad) = A(\quad) = \quad A$，所以

$A \quad = \quad , A^2 \quad = \quad 2 \quad$ 等价于

$\begin{cases} A \quad = \quad & ① \\ A \quad = \quad & ② \end{cases}$，先解① $A \quad = \quad$，即 $(E - A) \quad = 0$,

由 $E - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 可得，$\quad = \begin{pmatrix} -c_1 + 2c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$，其中 c_1, c_2 不同时为零.

此时 $A \quad = \quad \Leftrightarrow (E - A) \quad = \quad$,

$$(E - A, \quad) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -c_1 + 2c_2 \\ 1 & 1 & -2 & c_1 \\ 1 & 1 & -2 & c_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -c_1 + 2c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 2(c_1 - c_2) \\ 0 & 0 & 0 & (c_1 - c_2) \end{pmatrix}$$，故

$c_1 = c_2$,

从而 $(E-A,-\eta)\to\begin{pmatrix}1&1&2&-c_1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，所以 $=c_1\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$.综上所述，

$$=c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}，\quad =c_1\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}，$$ 其中 $c_1\neq 0,\ k_1,k_2$ 为任意常数

22.投保人的损失事件发生时，保险公司的赔付额 Y 与投保人的损失额 X 关系为

$Y=\begin{cases}0, & X\le 100\\ X-100, & X>100\end{cases}$，设损失事件发生时，投保人的损失额 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\cdot 100^2}{(100+x)^3}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}.$$

(1)求 $P\{Y>0\}$ 及 $E(Y)$.

(2)设这种损失事件一年内发生的次数记为 N，保险公司在一年内就这种损失事件产生的理赔次数记为 M，假设 N 服从参数为8的泊松分布，在 $N=n(n\ge 1)$ 的条件下，M 服从二项分布 $B(n,p)$，其中 $p=P\{Y>0\}$.求 M 的概率分布.

【解】

(1) $P\{Y>0\}=P\{X-100>0\}=P\{X>100\}=\int_{100}^{+\infty}\dfrac{2\cdot 100^2}{(100+x)^3}\mathrm{d}x=2\cdot 100^2\int_{200}^{+\infty}\dfrac{1}{u^3}\mathrm{d}u$

$$=-100^2\cdot\frac{1}{u^2}\bigg|_{200}^{+\infty}=\frac{1}{4}.$$

$$E(Y)=\int_{100}^{+\infty}(x-100)\cdot\frac{2\cdot 100^2}{(100+x)^3}\mathrm{d}x=2\cdot 100^2\int_{100}^{+\infty}\left[\frac{x+100}{(100+x)^3}-\frac{200}{(100+x)^3}\right]\mathrm{d}x$$

$$=2\left[100^2\cdot\frac{1}{100-x}-200\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(100-x)^2}\right]\Bigg|_{100}^{+\infty}=50$$

(2)由题意知 $N\sim P(8)$，从而 $P\{N=n\}=\frac{8^n}{n!}\mathrm{e}^{-8},n=1,2,\cdots$，又由 $N=n(n\geq 1)$ 的条件下，M 服从二项分布 $B(n,p)$ 知，

$$P\{M=k\mid N=n\}=C_n^k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k},k=0,1,\cdots,n.$$

从而 $P\{M=k\}=\sum_{n=k}^{\infty}P\{N=n\}\cdot P\{M=k\mid N=n\}=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{8^n}{n!}\mathrm{e}^{-8}\cdot C_n^k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}$

$$=\frac{\mathrm{e}^{-8}}{3^k k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{6^n}{n!}\cdot\frac{n!}{(n-k)!}=\frac{\mathrm{e}^{-8}}{3^k k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{6^n}{(n-k)!}=\frac{2^k\mathrm{e}^{-8}}{k!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{6^m}{m!}=\frac{2^k\mathrm{e}^{-8}}{k!}\mathrm{e}^{6}=\frac{2^k}{k!}\mathrm{e}^{-2}\ (k=0,1,2,\cdots)$$

.

即 M 服从参数为 2 的泊松分布.