2025 年全国硕士研究生招生考试

数学（三）

一、选择题：1~10 小题,每小题 5 分,共 50 分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的，请将所选选项前的字母填在答题卡指定位置.

（1）当 $x\to0^+$时，下列无穷小量中，与 x 等价的是（　　）

（A）$e^{-\sin x}-1$　　（B）$\sqrt{x}+1-\cos x$　　（C）$1-\cos\sqrt{2x}$　　（D）$1-\frac{\ln(1+x)}{x}$

2. 已知函数 $f(x)=\int_0^x e^{t^2}\sin t dt$ ，$g(x)=\int_0^x e^{t^2}dt\cdot\sin^2 x$ ，则

（A）$x=0$ 是f（x）的极值点，也是 g（x）的极值点

（B）$x=0$ 是f（x）的极值点，(0,0）是曲线$y=g$（x）的拐点

（C）$x=0$ 是f（x）的极值点，(0,0）是曲线$y=f$（x）的拐点

（D）(0,0）是曲线$y=f$（x）的拐点，也是曲线$y=g$（x）的拐点

（3） 已知 k 为常数，则级数$\sum_{i=1}^{n}(-1)^n\left[\frac{1}{n}-\ln\left(\frac{k}{n^2}\right)\right]$（　　）.

（A）绝对收敛　　（B）条件收敛

（C）发散　　（D）敛散性与k 的取值相关

（4）设函数f（x）连续，则 $\int_0^1 dy\int_0^y f(x)\,dx$ （　　）

（A）$\int_0^1 xf(x)dx$　　（B）$\int_0^1(1+x)f(x)dx$

（C）$\int_0^1(x\text{-}1)f(x)dx$　　（D）$\int_0^1(1\text{-}x)f(x)dx$

（5） 已知A 是 $m\times n$ 的矩阵，β是 m 维非零向量。若 A 有 k 阶非零子式，则（　　）

（A）当 $k=m$ 时 $Ax=\beta$有解　　（B）当 $k=m$ 时 $Ax=\beta$无解

（C）当 $k<m$ 时 $Ax=\beta$有　　（D）当 k<m 时 $Ax=\beta$无解

（6）设 A 为 3 阶矩阵，则“A^3-A^2 可对角化”是“A 可对角化”的（　　）

（A）充分但不必要条件　　（B）必要但不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（7）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -a\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & a\end{pmatrix}$，若 $f(x,y)=|xA+yB|$ 是正定二次型，则 a 的取值范围是（　　）

（A）$\left(0,2-\sqrt{3}\right)$　（B）$\left(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}\right)$　（C）$\left(2+\sqrt{3},4\right)$　（D）（0，4）

（8）设随机变量 X 服从正态分布 N（-1, 1）），Y 服从正态分布 N（1.2），若 X 与 $X+2Y$ 不相关，则 X 与 $X-Y$ 的相关系数为（　　）

（A）$\frac{1}{3}$　（B）$\frac{1}{2}$　（C）$\frac{2}{3}$　（D）$\frac{3}{4}$

（9）设 x_1，$x_2 \ldots x_{20}$ 是来自总体 B（1,0.1）的简单随机样本，令 $T=\sum_{i=1}^{20} x$，利用泊松分布近似表示二项分布的方法可得 $P\{T\leq 1\}\approx$（　　）

（A）$\frac{1}{e^2}$　（B）$\frac{2}{e^2}$　（C）$\frac{3}{e^2}$　（D）$\frac{4}{e^2}$

（10）设总体 X 的均匀分布为 F（x），$X_1,X_2,\ldots X_n$,为来自总体 X 的简单随机样本，样本的经验分布函数为 F_n（x），对于给定的 x（$0<F(x)<1$），$D(F(x))=$

（A）$F(x)(1-F(x))$　　（B）$(F(x))^2$

（C）$\frac{1}{n}F(x)(1-F(x))$　　（D）$\frac{1}{n}(F(x))^2$

二、填空题：11~16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

（11）设 g（x）是函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3+x}{3-x}$ 的反函数，则曲线 $y=g$（x）的渐近线方程为__________.

（12）设 $\int_1^{+\infty}\dfrac{a}{x(2x+a)}dx=\ln 2$，则 a=__________.

（13）微分方程 $xy'-y+x^2e^x=0$ 满足条件 y（1）$=-e$ 的解为 $y=$__________.

（14）（14） 已知 $z=z$（x,y） 由 $z+\ln z-\int_1^x xe^{-t^2}dx=1$ 确定，则 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,1)}=$________.

（15） 已知 $f(x)=\begin{vmatrix}2x+1 & 3 & 2x+1 & 1\\ 2x & -3 & 4x & -2\\ 2x+1 & 2 & 2x+1 & 1\\ 2x & -4 & 4x & -2\end{vmatrix}$，$g(x)=\begin{vmatrix}2x+1 & 1 & 2x+1 & 3\\ 5x+1 & -2 & 4x & -3\\ 0 & 1 & 2x+1 & 2\\ 2x & -2 & 4x & -4\end{vmatrix}$，则方程 f（x）$=g$（x）的不同的根的个数为________.

（16）设 A、B、C 为三个随机事件，且 A 与 B 相互独立，B 与 C 相互独立，A 与 C 互不相容，已知 P（A）$=P$（C）$=\dfrac{1}{4}$，P（B）$=\dfrac{1}{2}$,则在事件 A、B、C 至少有一个发生的事件下，A、B、C 中恰有一个发生的概率为________.

三、解答题：17~22 小题，共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（17）（本题满分 10 分）

计算$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2-2x+2)}dx$.

（18）（本题满分 12 分）

设函数f（x）在 x=0 处连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{xf(x)-e^{2\sin x}+1}{\ln(1+x)+\ln(1-x)}=-3$，证明$f$（$x$）在 x=0 处可导，并求f'（0）

（19）（木题满分 12 分）

已知平面有界区域$D=\left\{(x,y)\,|\,y^2\le x,x^2\le y\right\}$，计算二重积分$\iint\limits_D (x-y+1)^2dxdy$.

（20）（本题满分 12 分）

设函数f（x）在区间（a,b）内可导，证明导函数f（x）在（a,b）内严格单调增加的充分必要条件是：对（a,b） 内任意的x_1,x_2,x_3 ,当 $x_1<x_2<x_3$ 时，$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$.

（21）（本题满分 12 分）

设知阵$A=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & -a & -1 \\ 1 & 1 & a & 2 & 3 \end{vmatrix}$的秩为 2.

（1）求 a 的值

（2）求 A 的列向量组的一个极大线性无关组α，β， 并求矩阵 H，使得 $A=GH$，其中 $G=$（α，β）.

（22）（本题满分 12 分）

投保人的损失事件发生时，保险公司的赔付额 Y 与投保人的损失额 X 的关系为：

$$Y=\begin{cases}0, X\le 100\\ X-100, X>100\end{cases}$$，设损失事件发生时，投保人的损失额 X 概率密度为：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\times 100^2}{(100+x)^2}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$$

（1）求 $P\{Y>0\}$ 及 EY；

（2）这种损失事件在一年内发生的次数记为 N，保险公司在一年内就这种损失事件产生的理赔次数记为 M. 假设 N 服从参数为 δ 的泊松分布，在 $N=n$（$n\geq 1$）的条件下，M 服从二项分布 B（n,p），其中 $p=P\{Y>0\}$，求 M 的概率分布