2025 年全国硕士研究生招生考试

数学（二）

一、选择题：1~10 小题,每小题 5 分,共 50 分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的，请将所选选项前的字母填在答题卡指定位置.

1.设函数 z=z（x，,y）由 $z \quad \ln z \quad 1_y^x e^{\ t^2}dt \ll 0$ 确定，则 $\frac{z}{x} \quad \frac{z}{y} \ll$（　　）.

（A）$\frac{z}{z+1}(e^{\ x^2}\text{-}e^{\ y^2})$　　（B）$\frac{z}{z+1}(e^{\ x^2}+e^{\ y^2})$

（C）$\frac{z}{z+1}(e^{\ x^2}\text{-}e^{\ y^2})$　　（D）$\frac{z}{z+1}(e^{\ x^2}+e^{\ y^2})$

2.已知函数 $f(x) \ll 1_0^x e^{t^2}\sin t dt$， $g(x) \ll 1_0^x e^{t^2}dt{\bullet}\sin^2 x$，则（　　）

（A）x=0 是 f（x）的极值点，也是 g（x）的极值点

（B）x=0 是 f（x）的极值点，（0,0）是曲线 y=g（x）的拐点

（C）x=0 是 f（x）的极值点，（0,0）是曲线 y=f（x）的拐点

（D）（0,0）是曲线 y=f（x）的拐点，也是曲线 y=g（x）的拐点

3.如果对微分方程 y''-2ay'+（a+2）y=0 的任一解 y（x），反常积分 $1_0^{\mathbb{N}} y(x)dx$ 均收敛，那么 a 的取值范围是（　　）

（A）(-2,-1]　　（B）(-∞,-1]　　（C）(-2,0)　　（D）(-∞,0)

4.设函数 f(x)，g（x）在 x=0 的某去心邻域内有定义且恒不为零.若当 x→0 时，f（x）是 g（x）的高阶无穷小，则当 x→0 时，（　　）

（A）f（x）+g（x）=0（g（x））

（B）$f(x)g$（x）=$o(f^2$（x））

（C）$f(x)$=$o(e^{g(x)}$-1）

（D）$f(x)$=$o(g^2(x))$

5.设函数 $f(x,y)$连续，则 $\int_{-2}^{2}dx\int_{4-x^2}^{4}f(x,y)dy=$（　　）.

（A）$\int_0^4\left[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}}f(x,y)dx+\int_{\sqrt{4-y}}^{2}f(x,y)dx\right]dy$

（B）$\int_0^4\left[\int_{-2}^{\sqrt{4-y}}f(x,y)dx+\int_{\sqrt{4-y}}^{2}f(x,y)dx\right]dy$

（C）$\int_0^4\left[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}}f(x,y)dx+\int_{2}^{\sqrt{4-y}}f(x,y)dx\right]dy$

（D）$2\int_0^4 dy\int_{\sqrt{4-y}}^{2}f(x,y)dx$

6.设单位质点 P，Q 分别位于点（0.0）和（0,1）处，P 从点（0，0)出发沿 x 轴正向移动，记 G 为引力常量，则当质点 P 移动到点（l，0）时，克服质点 Q 的引力所做的功为（　　）

（A）$\int_0^l\frac{G}{x^2+1}dx$　　（B）$\int_0^l\frac{Gx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}dx$

（C）$\int_0^l\frac{G}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}dx$　　（D）$\int_0^l\frac{G(x+1)}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}dx$

7.设函数 f（x）连续，给出下列四个条件

① $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|f(x)|-f(0)}{x}$存在；② $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-|f(0)|}{x}$存在：

③ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{x}$存在；④ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x}$存在；

其中能得到“f（x）在 x=0 处可导”的条件个数是（　　）

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

8.设矩阵$\begin{pmatrix}1&2&0\\2&a&0\\0&0&b\end{pmatrix}$有一个正特征值和两个负特征值，则（　　）

（A）$a>4,b>0$　　（B）$a<4,b>0$

（C）$a>4,b<0$　　（D）$a<4,b<0$

9.下列矩阵中，可以经过若干初等行变换得到矩阵$\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$的是（　　）

（A）$\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&2&1&3\\2&3&1&4\end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&1&2&5\\1&1&1&3\end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&3\\0&1&0&0\end{pmatrix}$　　（D）$\begin{pmatrix}1&1&2&3\\1&2&2&3\\2&3&4&6\end{pmatrix}$

10.设3阶矩阵A，B满足r（AB）=r（BA）+1,则（　　）

（A）方程组（$A+B$）x=0只有零解

（B）方程组Ax=0与方程组Bx=0均只有零解

（C）方程组Ax=0与方程组Bx=0没有公共非零解

（D）方程组$ABAx$=0与方程组$BABx$=0有公共非零解

二、填空题：11～16小题，每小题5分，共30分.

11.设$\int_1^{+\infty}\frac{a}{x(2x+a)}dx=\ln 2$，则$a$=_______.

12.曲线$y=\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}$的渐近线方程为______.

13.$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left[\ln\frac{1}{n}+2\ln\frac{2}{n}+\dots+(n-1)\ln\frac{n-1}{n}\right]=$________.

14.已知函数$y=y(x)$由$\begin{cases}x=\ln(1+2t)\\2t-\int_1^{y+t^2}e^{-u^2}du=0\end{cases}$确定，则$\frac{dy}{dy}\Big|_{t=0}=$_________.

15.微分方程$(2y-3x)dx+(2x-5y)dy=0$满足条件$y(1)=1$的解为_______.

16.设矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$,线性无关，且$\alpha_1+\alpha_2=\alpha_3+\alpha_4$，则方程组 $Ax=\alpha_1+4\alpha_4$ 的通解为 $x=$________.

三、解答题：17~22 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.(本题满分 10 分)

计算 $\int_0^1 \frac{1}{(x\quad 1)(x^2\quad 2x\quad 2)}dx$.

18.(本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xf(x)\quad e^{2\sin x}\quad 1}{\ln(1\quad x)\quad \ln(1-x)} \ll 3$，证明 $f(x)$在 $x=0$ 处可导，并求 $f'(0)$.

19.(本题满分 12 分)

设函数 $f(x,y)$可微且满足 $df(x,y)=-2xe^{-y}dx+e^{-y}(x^2-y-1)dy$，$f(0,0)=2$,求 $f(x,y)$,并求 $f(x,y)$的极值.

20.(本题满分 12 分)

已知平面有界区域 $D=\{(x,y)x^2+y^2\leqslant 4x，x^2+y^2\leqslant 4\}$，计算 $\iint_D (x\quad y)^2dxdy$.

21.(本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$在区间(a,b)内可导，证明导函数 $f'(x)$在(a,b)内严格单调增加的充分必要条件是：

对(a,b)内任意的 x_1，x_2，x_3，当 $x_1<x_2<x_3$ 时，$\dfrac{f(x_2)\quad f(x_1)}{x_2\quad x_1} < \dfrac{f(x_3)\quad f(x_2)}{x_3\quad x_2}$.

22.(本题满分 12 分)

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$与 $B=\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$合同.

(1)求 a 的值及 k 的取值范围；

(2)若存在正交矩阵 Q,使得 $Q^TAQ=B$,求 k 及 Q.