

2021 考研数学真题及答案解析

数学 (二)

一、选择题 (本题共 10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求, 把所选选项前的字母填在答题卡指定位置上.)

(1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^{x^2} (e^t - 1) dt$ 时 x^7 的

- (A) 低阶无穷小. (B) 等价无穷小. (C) 高阶无穷小. (D) 同阶但非等价无穷小.

【答案】C.

【解析】因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $\left[\int_0^{x^2} (e^t - 1) dt \right]' = 2x(e^{x^2} - 1) \sim 2x^3$, 所以 $\int_0^{x^2} (e^t - 1) dt$ 是 x^7 高阶无穷小, 正确答案为 C.

(2) 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, 在 $x = 0$ 处

- (A) 连续且取极大值. (B) 连续且取极小值.
(C) 可导且导数为 0. (D) 可导且导数不为 0.

【答案】D.

【解析】因为 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 = f(0)$, 故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续;

因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$, 故 $f'(0) = \frac{1}{2}$, 正确答案为 D.

(3) 有一圆柱体底面半径与高随时间变化的速率分别为 2 cm/s , -3 cm/s , 当底面半径为 10 cm , 高为 5 cm 时, 圆柱体的体积与表面积随时间变化的速率分别为

- (A) $125 \pi \text{ cm}^3 / \text{s}$, $40 \pi \text{ cm}^2 / \text{s}$.
(B) $125 \pi \text{ cm}^3 / \text{s}$, $-40 \pi \text{ cm}^2 / \text{s}$.
(C) $-100 \pi \text{ cm}^3 / \text{s}$, $40 \pi \text{ cm}^2 / \text{s}$.
(D) $-100 \pi \text{ cm}^3 / \text{s}$, $-40 \pi \text{ cm}^2 / \text{s}$.

【答案】C.

【解析】由题意知, $\frac{dr}{dt} = 2, \frac{dh}{dt} = -3$, 又 $V = \pi r^2 h, S = 2\pi r h + 2\pi r^2$

则 $\frac{dV}{dt} = 2\pi r h \frac{dr}{dt} + \pi r^2 \frac{dh}{dt}, \frac{dS}{dt} = 2\pi h \frac{dr}{dt} + 2\pi r \frac{dh}{dt} + 4\pi r \frac{dr}{dt}$

当 $r = 10, h = 5$ 时, $\frac{dV}{dt} = -100\pi, \frac{dS}{dt} = 40\pi$, 选 C.

(4) 设函数 $f(x) = ax - b \ln x (a > 0)$ 有两个零点, 则 $\frac{b}{a}$ 的取值范围是

- (A) $(e, +\infty)$. (B) $(0, e)$. (C) $(0, \frac{1}{e})$. (D) $(\frac{1}{e}, +\infty)$.

【答案】A.

【解析】令 $f(x) = ax - b \ln x = 0$, $f'(x) = a - \frac{b}{x}$, 令 $f'(x) = 0$ 有驻点 $x = \frac{b}{a}$, $f\left(\frac{b}{a}\right) = a \cdot \frac{b}{a} - b \cdot \ln \frac{b}{a} < 0$,

从而 $\ln \frac{b}{a} > 1$, 可得 $\frac{b}{a} > e$, 正确答案为 A.

(5) 设函数 $f(x) = \sec x$ 在 $x = 0$ 处的 2 次泰勒多项式为 $1 + ax + bx^2$, 则

(A) $a = 1, b = -\frac{1}{2}$.

(B) $a = 1, b = \frac{1}{2}$.

(C) $a = 0, b = -\frac{1}{2}$.

(D) $a = 0, b = \frac{1}{2}$.

【答案】D.

【解析】由 $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$ 知当 $f(x) = \sec x$ 时, $f(0) = \sec 0 = 1, f'(0) = (\sec x \tan x)|_{x=0} = 0, f''(0) = (\sec x \tan^2 x + \sec^3 x)|_{x=0} = 1$, 则 $f(x) = \sec x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$. 故选 D.

(6) 设函数 $f(x, y)$ 可微, 且 $f(x+1, e^x) = x(x+1)^2, f(x, x^2) = 2x^2 \ln x$, 则 $df(1, 1) =$

(A) $dx + dy$.

(B) $dx - dy$.

(C) dy .

(D) $-dy$.

【答案】C.

【解析】 $f'_1(x+1, e^x) + e^x f'_2(x+1, e^x) = (x+1)^2 + 2x(x+1)$ ①

$f'_1(x, x^2) + 2xf'_2(x, x^2) = 4x \ln x + 2x$ ②

将 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 分别代入①②式有

$$f'_1(1, 1) + f'_2(1, 1) = 1, \quad f'_1(1, 1) + 2f'_2(1, 1) = 2$$

联立可得 $f'_1(1, 1) = 0, f'_2(1, 1) = 1, df(1, 1) = f'_1(1, 1)dx + f'_2(1, 1)dy = dy$, 故正确答案为 C.

(7) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 则 $\int_0^1 f(x)dx =$

(A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{2n}$.

(B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{n}$.

(C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k-1}{2n}\right) \frac{1}{n}$.

(D) $\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{2n}\right) \cdot \frac{2}{n}$.

【答案】B.

【解析】由定积分的定义知, 将 $[0, 1]$ 分成 n 份, 取中间点的函数值, 则

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{n},$$

即选 B.

(8) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_3 - x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为

(A) 2, 0.

(B) 1, 1.

(C) 2, 1.

(D) 1, 2.

【答案】B.

【解析】 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_3 - x_1)^2 = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$

所以 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 故特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 3)\lambda$$

令上式等于零, 故特征值为 $-1, 3, 0$, 故该二次型的正惯性指数为 1, 负惯性指数为 1. 故应选 B.

(9) 设 3 阶矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可以由向量组 β_1, β_2 线性表出, 则

- (A) $Ax = 0$ 的解均为 $Bx = 0$ 的解.
- (B) $A^T x = 0$ 的解均为 $B^T x = 0$ 的解.
- (C) $Bx = 0$ 的解均为 $Ax = 0$ 的解.
- (D) $B^T x = 0$ 的解均为 $A^T x = 0$ 的解.

【答案】D.

【解析】令 $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 由题 a_1, a_2, a_3 可由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示, 即存在矩阵 P , 使得 $BP = A$, 则当 $B^T x_0 = 0$ 时, $A^T x_0 = (BP)^T x_0 = P^T B^T x_0 = 0$. 恒成立, 即选 D.

(10) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 若下三角可逆矩阵 P 和上三角可逆矩阵 Q , 使 PAQ 为对角

矩阵, 则 P, Q 可以分别取

- (A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- (B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- (C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- (D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

【答案】C.

【解析】

$$(A, E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (F, P), \text{ 则 } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} F \\ E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix}, \text{ 则 } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ 故应选 C.}$$

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.）

(11) $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|3^{-x^2} dx =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{\ln 3}$.

【解析】 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|3^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} x3^{-x^2} dx = -\int_0^{+\infty} 3^{-x^2} d(-x^2) = -\frac{1}{\ln 3} \cdot 3^{-x^2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\ln 3}$.

(12) 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 2e^t + t + 1 \\ y = 4(t-1)e^t + t^2 \end{cases}$ 确定, 则 $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=0} =$ _____.

【答案】 $\frac{2}{3}$.

【解析】 由 $\frac{dy}{dx} = \frac{4te^t + 2t}{2e^t + 1}$, 得 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(4e^t + 4te^t + 2)(2e^t + 1) - (4te^t + 2t)2e^t}{(2e^t + 1)^3}$,

将 $t = 0$ 带入得 $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=0} = \frac{2}{3}$.

(13) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $(x+1)z + y \ln z - \arctan(2xy) = 1$ 确定, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(0,2)} =$ _____.

【答案】 1.

【解析】 方程两边对 x 求导得 $z + (x+1) \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{2y}{1+4x^2y^2} = 0$,

将 $x = 0, y = 2$ 带入原方程得 $z = 1$, 再将 $x = 0, y = 2, z = 1$ 带入得 $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$.

(14) 已知函数 $f(t) = \int_1^t dx \int_{\sqrt{x}}^1 \sin \frac{x}{y} dy$, 则 $f' \left(\frac{\pi}{2} \right) =$ _____.

【答案】 $\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} \frac{\cos u}{u^3} du - \frac{\cos \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{2} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

【解析】 交换积分次序有 $f(t) = -\int_1^{\sqrt{t}} dy \int_{y^2}^t \sin \frac{x}{y} dx$, 从而

$$\begin{aligned} f(t) &= -\int_1^{\sqrt{t}} dy \int_{y^2}^t \sin \frac{x}{y} dx = \int_1^{\sqrt{t}} y \left(\cos \frac{t}{y} - \cos y \right) dy \\ &= \int_1^{\sqrt{t}} y \cos \frac{t}{y} dy - \int_1^{\sqrt{t}} y \cos y dy \\ &= t^2 \int_{\sqrt{t}}^t \frac{\cos u}{u^3} du - \int_1^{\sqrt{t}} y \cos y dy \end{aligned}$$

$$f'(t) = 2t \int_{\sqrt{t}}^t \frac{\cos u}{u^3} du + t^2 \left(\frac{\cos t}{t^3} - \frac{\cos \sqrt{t}}{t^{3/2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} \right) - \sqrt{t} \cos \sqrt{t}, \text{ 故}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi \int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{u^3} du - \frac{\cos \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{2} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

(15) 微分方程 $y''' - y = 0$ 的通解 $y =$ _____.

【答案】 $y = C_1 e^x + e^{-\frac{1}{2}x} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right), C_1, C_2, C_3 \in R.$

【解析】 由特征方程 $\lambda^3 - 1 = 0$ 得 $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 故方程通解为

$$y = C_1 e^x + e^{-\frac{1}{2}x} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right), C_1, C_2, C_3 \in R.$$

(16) 多项式 $f(x) = \begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3 项的系数为 _____.

【答案】 -5.

【解析】

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ 1 & x & 1 \\ -1 & 1 & x \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & x & 1 \\ 2 & 1 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & x & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ 2 & 1 & x \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

所以展开式中含 x^3 项的有 $-x^3, -4x^3$, 即 x^3 项的系数为 -5.

三、解答题 (本题共 6 小题, 共 70 分. 请将解答写在答题纸指定位置上, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(17) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \int_0^x e^{t^2} dt}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right).$

【答案】 $\frac{1}{2}.$

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \int_0^x e^{t^2} dt}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1 - \int_0^x e^{t^2} dt}{(e^x - 1) \sin x}$

又因为 $\int_0^x e^{t^2} dt = \int_0^x (1 + t^2 + o(t^2)) dt = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$, 故

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3))(1 + x + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)) - x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

(18)(本题满分 12 分)

已知 $f(x) = \frac{x|x|}{1+x}$, 求 $f(x)$ 的凹凸性及渐近线.

【答案】凹区间 $(-\infty, -1)$, $(0, +\infty)$, 凸区间 $(-1, 0)$. 斜渐近线是 $y = x - 1$, $y = -x - 1$.

【解析】因为 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{1+x}, & x > 0 \\ \frac{-x^2}{1+x}, & x \leq 0 \end{cases}$, 故 $x > 0$, $f'(x) = \frac{2x+x^2}{(1+x)^2}$, $f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$,
 $x < 0$, $f'(x) = \frac{-2x-x^2}{(1+x)^2}$, $f''(x) = \frac{-2}{(1+x)^3}$,

所以

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f''(x)$	+		-		+
$f(x)$	凹	拐点	凸	拐点	凹

凹区间 $(-\infty, -1)$, $(0, +\infty)$, 凸区间 $(-1, 0)$.

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x|x|}{1+x} = \infty$, $x = -1$ 是垂直渐近线.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x|x|}{(1+x)x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{x|x|}{(1+x)} - 1) = -1$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x|x|}{(1+x)x} = -1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{x|x|}{(1+x)} - 1) = -1$. 斜渐近线是 $y = x - 1$, $y = -x - 1$.

(19)(本题满分 12 分)

$f(x)$ 满足 $\int \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{6}x^2 - x + C$, L 为曲线 $y = f(x)$ ($4 \leq x \leq 9$), L 的弧长为 s , L 绕 x 轴

旋转一周所形成的曲面的面积为 A , 求 s 和 A .

【答案】 $\frac{425\pi}{9}$.

【解析】 $\frac{f(x)}{\sqrt{x}} = \frac{1}{3}x - 1$, $f(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}$,

曲线的弧长 $s = \int_4^9 \sqrt{1+y'^2} dx = \int_4^9 \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{1}{4x}} dx = \frac{22}{3}$.

曲面的侧面积 $A = 2\pi \int_4^9 y \sqrt{1+y'^2} dx = 2\pi \int_4^9 (\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}) \sqrt{x + \frac{1}{x} + 2} dx$
 $= \frac{425\pi}{9}$.

(20)(本题满分 12 分)

函数 $y = y(x)$ 的微分方程 $xy' - 6y = -6$, 满足 $y(\sqrt{3}) = 10$,

(1) 求 $y(x)$;

(2) P 为曲线 $y = y(x)$ 上的一点, 曲线 $y = y(x)$ 在点 P 的法线在 y 轴上的截距为 I_y , 为使 I_y 最

小, 求 P 的坐标.

【答案】(1) $y(x) = 1 + \frac{x^6}{3}$. (2) $P\left(\pm 1, \frac{4}{3}\right)$ 时, I_y 有最小值 $\frac{11}{6}$.

【解析】(1) $y' - \frac{6}{x}y = -\frac{6}{x}$, $\therefore y = e^{\int \frac{6}{x} dx} \left[\int \left(-\frac{6}{x}\right) e^{-\int \frac{6}{x} dx} dx + C \right] = x^6 \left(\frac{1}{x^6} + C \right) = 1 + Cx^6$

将 $y(\sqrt{3}) = 10$ 代入, $C = \frac{1}{3}$, $\therefore y(x) = 1 + \frac{x^6}{3}$.

(2) 设 $P(x, y)$, 则过 P 点的切线方程为 $Y - y = 2x^5(X - x)$,

法线方程为 $Y - y = -\frac{1}{2x^5}(X - x)$,

令 $X = 0$, $\therefore Y = I_y = 1 + \frac{x^6}{3} + \frac{1}{2x^4}$, 偶函数, 为此仅考虑 $(0, +\infty)$

令 $(I_y)' = 2x^5 - \frac{2}{x^5} = 0$, $x = 1$.

$\therefore x \in (0, 1)$, $(I_y)' < 0$, $I_y > I_y(1) = \frac{11}{6}$; $x \in (1, +\infty)$, $(I_y)' > 0$, $I_y > I_y(1) = \frac{11}{6}$

$\therefore P\left(\pm 1, \frac{4}{3}\right)$ 时, I_y 有最小值 $\frac{11}{6}$.

(21)(本题满分 12 分)

曲线 $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2 (x \geq 0, y \geq 0)$ 与 x 轴围成的区域为 D , 求 $\iint_D xy dx dy$.

【答案】 $\frac{1}{48}$

【解析】 $\iint_D xy dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r^3 \sin \theta \cos \theta dr$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4} \cos^2 2\theta \sin \theta \cos \theta d\theta$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{16} \cos^2 2\theta d \cos 2\theta$$

$$= -\frac{1}{48} \cos^3 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{48}$$

(22)(本小题满分 12 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & b \end{pmatrix}$ 仅有两个不同的特征值. 若 A 相似于对角矩阵, 求 a, b 的值, 并求可

逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

【解析】由 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & 0 \\ -1 & -a & \lambda - b \end{vmatrix} = (\lambda - b)(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$

当 $b = 3$ 时, 由 A 相似对角化可知, 二重根所对应特征值至少存在两个线性无关的特征向量, 则

$$(3E - A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -a & 0 \end{pmatrix} \text{ 知, } a = -1,$$

$$\text{此时, } \lambda_1 = \lambda_2 = 3 \text{ 所对应特征向量为 } \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_3 = 1 \text{ 所对应的特征向量为 } \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 则 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

当 $b=1$ 时, 由 A 相似对角化可知, 二重根所对应特征值至少存在两个线性无关的特征向量, 则

$$(E - A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -a & 0 \end{pmatrix}, \text{ 知 } a = 1,$$

$$\text{此时, } \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \text{ 所对应特征向量为 } \beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_3 = 3 \text{ 所对应的特征向量为 } \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 则 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{pmatrix}.$$