2020 考研数学一真题（完整版）

一、选择题：1~8 小题，第小题 4 分，共 32 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1. $x \to 0^+$ 时，下列无穷小量中最高阶是（　　）

A. $\int_0^x \left(e^{t^2}-1\right)dt$

B. $\int_0^x \ln(1+\sqrt{t^3}dt)$

C. $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$

D. $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin t^2}dt$

2.设函数 $f(x)$ 在区间（-1，1）内有定义，且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0,$ 则（　　）

A.当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0, f(x)在x=0$ 处可导.

B.当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2}}=0, f(x)在x=0$ 处可导.

C.当 $f(x)在x=0处可导时,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0.$

D.当 $f(x)在x=0处可导时,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2}}=0.$

3.设函数 $f(x)$ 在点（0，0）处可微，$f(0,0)=0, n=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},-1\right)\Bigg|_{(0,0)}$ 非零向量 d 与 n 重直，则（　　）

A. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|n\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0存在$

B. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|n\times(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0存在$

C. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|d\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0存在$

D. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|d\times(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

4.设 R 为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径，r 是实数，则（　　）

A. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 发散时，$|r| \geq R$

B. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 发散时，$|r| \leq R$

C. $|r| \geq R$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 发散

D. $|r| \leq R$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 发散

5.若矩阵 A 经初等变换化成 B，则（　　）
A.存在矩阵 P，使得 $PA=B$
B.存在矩阵 P，使得 $BP=A$
C.存在矩阵 P，使得 $PB=A$
D.方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解

6.已知直线 $L_1:\dfrac{x-a_2}{a_1}=\dfrac{y-b_2}{b_1}=\dfrac{2-c_2}{c_1}$

与直线 $L_2:\dfrac{x-a_3}{a_2}=\dfrac{y-b_3}{b_2}=\dfrac{2-c_3}{c_2}$ 相交于一点，法向量 $a_i=\begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix}, i=1,2,3.$ 则

A. a_1 可由 a_2, a_3 线性表示

B. a_2 可由 a_1, a_3 线性表示

C. a_3 可由 a_1, a_2 线性表示

D. a_1, a_2, a_3 线性无关

7.设 *A,B,C* 为三个随机事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}, P(AB)=0 \quad P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{12}$，则 *A,B,C* 中恰有一个事件发生的概率为

A. $\dfrac{3}{4}$

B. $\dfrac{2}{3}$

C. $\dfrac{1}{2}$

D. $\frac{5}{12}$

8.设 $x_1,x_2,\cdots,x_{(n)}$ 为来自总体 X 的简单随机样本，其中 $P(X=0)=P(X=1)=\frac{1}{2},\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数，则利用中心极限定理可得 $P\left(\sum_{i=1}^{100}X_i\le 55\right)$ 的近似值为

A. $1-\Phi(1)$

B. $\Phi(1)$

C. $1-\Phi(0,2)$

D. $\Phi(0,2)$

二、填空题：9—14 小题，每小题 2 分，共 24 分。请将解答写在答题纸指定位置上.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right]=$

10.设 $\begin{cases} x=\sqrt{t^2+1} \\ y=\ln(t+\sqrt{t^2+1}) \end{cases}$，则 $\frac{d^2y}{dx^2}|_{t=1}=$

11.若函数 $f(x)$ 满足 $f''(x)+af'(x)+f(x)=0(a>0)$, 且 $f(0)=m,f'(0)=n$，则 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=$

12.设函数 $f(x,y)=\int_0^{xy}\mathrm{e}^{xt^2}\mathrm{d}t$，则 $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,11)}=$

13.行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}=$

14. 设 x 顺从区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上的均匀分布，$Y=\sin X$，则 $Cov(X,Y=$

三、解答题：15~23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的最大值

16.（本题满分 10 分）

计算曲线积分 $I=\int_L \frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{4x^2+y}dy$ 其中 L 是 $x^2+y=2$，方向为逆时针方向

17.（本题满分 10 分）

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1(x+1)a_n+1=\left(n+\frac{1}{2}\right)a_n$，证明：当 $|x|<1$ 时幂级数 $\sum_{n=1} a_n x^n$ 收敛，并求其和函数.

18.（本题满分 10 分）

设 Σ 为由面 $Z:\sqrt{x^2+y^2}\left(\left|x^2+y^2\right|\le 4\right)$ 的下侧，$f(x)$ 是连续函数，计算 $I=\iint_\Sigma [xf(xy)+2-y]dydz+[yf(xy)+2y+x]dzdx+[2f(xy)+2]dxdy$

19.设函数 $f(x)$ 在区间[0,2]上具有连续导数，$f(0)=f(2)=0, M=\max_{x\in(0,2)}\{|f(x)|\}$，证明（1），存在号 $\xi\in(0,2)$，使得 $|f'(\xi)|\ge M$ （2）若对任意的 $x\in(0,2), |f'(x)|\le M$，则 $M=0$.

20. 设二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2+4x_1x_2+4x_2^2$ 经正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1,y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2$，其中 $a\ge b$.

（1）求 a,b 的值.

（2）求正交矩阵 Q.

21.设 A 为 2 阶矩阵，$P=(\alpha, A\alpha)$，其中 α 是非零向量且不是 A 的特征向量.

（1）证明 P 为可逆矩阵

（2）若 $A^2\alpha+A\alpha-6\alpha=0$，求 $P^{-1}AP$，并判断 A 是否相似于对角矩阵.

22.设随机变量 X_1，X_2，X_3 相互独立，其中 X_1 与 X_2 均服从标准正态分布，X_3 的概率分布为 $P\{X_3=0\}=P\{X_3=1\}=\frac{1}{2}, Y=X_3X_1+(1-X_3)X_2$.

（1）求二维随机变量（X_1，Y）的分布函数，结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示.

（2）证明随机变量 Y 服从标准正态分布.

23.设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为

地址：北京市海淀区西三环北路 72 号世纪经贸大厦 B 座 1608 官网：www.wenduedu.com 电话：400-011-8090

$$F(t)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t\geq 0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

其中 θ, m 为参数且大于零.

（1）求概率 $P\{T>t\}$ 与 $P\{T>S+t\mid T>S\}$，其中 $S>0,t>0$.

（2）任取 n 个这种元件做寿命试验，测得它们的寿命分别为 $t_1,t_2\cdots,t_n$，若 m 已知，求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.